

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Wir betrachten jeweils die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

a) Mit $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{falls } k \leq 1777 \\ \frac{1}{2^k} & \text{falls } k > 1777 \end{cases}$ haben wir für $k > 1777$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine Majorante und somit Konvergenz. Für $k \leq 1777$ haben wir nur eine endliche Summe, was an der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nichts ändert.

b) Mit $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{1}{2^k} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$ haben wir mit der Abschätzung $a_k = \frac{1}{k+1} > \frac{1}{2k}$ für k gerade eine Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gefunden. Wie in a) ergibt sich für die Reihe für k ungerade zwar Konvergenz, dies ändert aber nichts an der Divergenz für alle k . Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist somit insgesamt divergent.

c) Mit $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k^{16}} & \text{falls } k \neq 12 \\ k & \text{falls } k = 12 \end{cases}$ erhalten wir Konvergenz mit dem Integralvergleichskriterium. Es gilt $\int_{13}^{\infty} \frac{1}{k^{16}} = \left. \frac{k^{-15}}{-15} \right|_{13}^{\infty} = \frac{1}{15 \cdot 13^{15}} < \infty$ und die ersten 12 Glieder sind lediglich endlich.

Aufgabe 2 a) Da $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist sind Urbilder von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen. Da die Menge $\{0\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist, ist das Urbild $f^{-1}(\{0\}) = A$ ebenfalls abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

b) Dies gilt zum Beispiel nicht für folgende unstetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in]0, 1[\\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

da das Urbild $f^{-1}(\{0\}) =]0, 1[$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 Es ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 2 \\ -\frac{4}{|x|}, & |x| > 2. \end{cases}$

1 Fall: $x < -2$ und $x > 2$. Hier ist $f(x) = -\frac{4}{|x|}$ eine stetige Funktion (Nenner $\neq 0$).

2. Fall: $-2 < x < 2$. Hier ist $f(x) = 2 - x^2$ eine stetige Funktion (Polynom).

3. Fall: $x = -2$. Hier ist $\lim_{x \rightarrow -2^-} (-\frac{4}{|x|}) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} (2 - x^2) = -2$ und $f(-2) = -2$
 $\Rightarrow f$ stetig in $x = -2$.

4. Fall: $x = 2$. Hier ist $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2 - x^2) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (-\frac{4}{|x|}) = -2$ und $f(2) = -2$
 $\Rightarrow f$ stetig in $x = 2$.

Die Funktion f somit stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 a)+b) Auf dem Definitionsbereich ist die Funktion natürlich stetig. Wir bestimmen uns zunächst die Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$ von

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3x + 6}{x^4 + 3x^2 - 4} + \frac{5}{x^4 + x^2 + 1}$. Wir untersuchen den Nenner auf Nullstellen und erhalten 2 Nullstellen: ± 1 , und somit $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Der zweite Bruch enthält keine Nullstellen. Der Nenner des ersten Bruchs faktorisiert ist somit $(x-1)(x+1)(x^2+4)$. Auch der Zähler hat $x = 1$ als Nullstelle, wir können somit den Faktor $(x-1)$ abspalten und erhalten als gekürzten Bruch $g(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 - 3x - 6}{x^3 + x^2 + 4x + 4} + \frac{5}{x^4 + x^2 + 1}$ und haben somit f bei $x = 1$ stetig ergänzt. Es bleibt noch die Stelle $x = -1$ zu untersuchen. Die Funktion f kann für $x = -1$ nicht stetig fortgesetzt werden, da links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht existieren. Die Funktion g ist somit stetig auf $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Aufgabe 5 a) Die Folge (a_n) ist konvergent gegen 0 und hat somit als einzigen Häufungspunkt 0. Es gilt $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$ und somit $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
b) Die Häufungspunkte der Menge M sind: $H = \{\sin x | x \in [0, 1]\}$

Aufgabe T1 Wir betrachten jeweils die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

a) Mit $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2+1} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \frac{k}{k^3+17} & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$ haben wir mit der Abschätzung $a_k = \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}$

für k ungerade, also $k = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ eine konvergente Majorante gefunden.

Für k gerade, also $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ machen wir die Abschätzung $a_k = \frac{k}{k^3+17} < \frac{k}{k^3} < \frac{1}{k^2}$ und haben mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ ebenfalls eine konvergente Majorante gefunden.

b) Mit $a_k = \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{k+1} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 2^{-k} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$ haben wir für k gerade mit der Abschätzung

$a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} > \frac{1}{2k}$ eine Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gefunden. Die Reihe für k ungerade ist zwar konvergent, dies ändert aber nichts an der Divergenz für alle k . Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist somit insgesamt divergent.

c) Mit $a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 2^{-k} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$ haben wir für k gerade, also $k = 2n$

mit $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ Konvergenz nach Leibniz, denn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$,
 $a_n \geq 0$ und (a_n) ist monoton fallend,

$$a_n \geq a_{n+1} \implies \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \iff \sqrt{2n+3} \geq \sqrt{2n+1} \iff 3 \geq 1.$$

Für k ungerade, also $k = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit der Abschätzung $a_k = \frac{1}{2^k} < \frac{1}{k^2}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ eine Majorante und somit Konvergenz. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist somit insgesamt konvergent.

Aufgabe T2 Die alternierenden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $a_n := b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ konvergieren nach Leibniz Kriterium.

Folge $(a_n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ist Nullfolge, ist klar. Zu zeigen ist noch (a_n) monoton fallend, es gilt

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} \geq 0 &\iff \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \geq 0 \iff \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \\ &\iff n+2 \geq n+1 \iff 2 \geq 1. \end{aligned}$$

Die Folgenglieder a_n sind auch alle positiv, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$.

Das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$ hat die Terme

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

und kann wie folgt abgeschätzt werden

$$\frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Es ist somit $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}} > \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} = (n+1) \frac{1}{n+1} = 1$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert nicht.

Aufgabe T3 a) Die Funktion $f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+$ (Kompositionen stetiger Funktionen sowie Wurzelfunktion sind stetig). Der Grenzwert existiert nicht, denn für $x \rightarrow 0$ konvergiert der Zähler gegen 2, und der Nenner gegen 0 und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+e^{x^2}}{\sqrt{x}} = \infty$. Eine stetige Fortsetzung somit nicht möglich.

b) Die Funktion $g(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, da der Bruch nur aus Polynomen besteht und der Nenner immer ungleich Null ist.

1. Fall: $x < 0$. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^3|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$,

2. Fall: $x > 0$. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^3|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren, existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^3|}{x^2} = 0$.

Um nun eine stetige Fortsetzung $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu erhalten können wir $g(0) := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^3|}{x^2} = 0$ setzen.

c) 1. Fall: Sei $(x_n) \in \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, so ergibt sich eine konstante Folge $h(x_n)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = 1$.

2. Fall: Sei $(x_n) \notin \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, so ergibt sich eine konstante Folge $h(x_n)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = 0$.

3. Fall: Sei $(x_n) \in \mathbb{R}$ mit unendlich vielen Folgengliedern $x_n \in \mathbb{Q}$ und unendlich vielen Folgengliedern $x_n \notin \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, so ergibt sich eine Folge $h(x_n)$ mit 2 Häufungspunkten 0 und 1.

4. Fall: Sei $(x_n) \in \mathbb{R}$, wobei entweder endlich viele Folgenglieder $x_n \in \mathbb{Q}$ und unendlich viele Folgenglieder $x_n \notin \mathbb{Q}$ sind, bzw. umgekehrt, so ergibt sich Fall 2 bzw. Fall 1.

Nach Fall 3 existieren Folgen mit 2 verschiedenen Häufungspunkten. Einen Grenzwert in 0 kann es somit nicht geben. Da die Funktion $h(x)$ nirgends stetig ist, existiert auch keine stetige Fortsetzung.

Aufgabe T4 a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Dies ist erfüllt für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, z.B. $f([0, 1]) = \{0\}$. Die 0 als Intervall mit gleichen Anfangs- und Endpunkt ist beschränkt und abgeschlossen.