

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt
Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 a) $f(x) = \operatorname{arsinh} x \Rightarrow f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{df(x)}} = \frac{1}{\cosh f(x)} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 f(x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b) $f(x) = (\cos 2x)e^{\sin x} \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x e^{\sin x} + \cos 2x e^{\sin x} \cos x$
 $= (\cos 2x \cos x - 2 \sin 2x) e^{\sin x}$

c) $f(x) = \ln(\ln x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$

d) $f(x) = x^{\sin x} (\sin x)^x \Rightarrow f'(x) = (x^{\sin x} (\sin x)^x)' = (e^{\sin x \ln x} \cdot e^{x \ln(\sin x)})'$
 $= (e^{\sin x \ln x + x \ln(\sin x)})' = (\cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x} + \ln(\sin x) + \frac{x}{\sin x} \cos x) e^{\sin x \ln x + x \ln(\sin x)}$
 $= (\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} + \ln(\sin x) + x \cot x) x^{\sin x} (\sin x)^x$

Aufgabe 2 Mit vollständiger Induktion zeigen wir folgende Aussage:
 Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $f^{(n)}$ existiert, und mit einem gewissen Polynom p_n ist

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x}) e^{(-\frac{1}{x^2})}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt die Behauptung nach Definition von f mit $p_1(y) = 1$.

Induktionsschluß: Für ein gewisses n sei die Behauptung gezeigt. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt mit Ketten- und Produktregel: $f^{(n)}$ ist differenzierbar. Es ist

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= (p_n(\frac{1}{x}))' e^{(-\frac{1}{x^2})} + p_n(\frac{1}{x}) (e^{(-\frac{1}{x^2})})' = -\frac{1}{x^2} p_n'(\frac{1}{x}) e^{(-\frac{1}{x^2})} + p_n(\frac{1}{x}) (\frac{2}{x^3} e^{(-\frac{1}{x^2})}) \\ &= (-\frac{1}{x^2} p_n'(\frac{1}{x}) + \frac{2}{x^3} p_n(\frac{1}{x})) e^{(-\frac{1}{x^2})}. \end{aligned}$$

Mit $p_{n+1}(y) = -y^2 p_n'(y) + 2y^3 p_n(y)$ gilt also für $x \neq 0$ die Behauptung. Beachte: auch p_n' ist ein Polynom. Es bleibt zu zeigen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p_n(\frac{1}{x}) e^{(-\frac{1}{x^2})}}{x} = 0.$$

Es ist bekannt, daß $y^k e^{-y} \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \infty$. Setzen wir $y = |x|^{-1}$, so gilt $|x|^{-k} e^{-\frac{1}{|x|}} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$. Für $|x| < 1$ ist $-\frac{1}{x^2} < -\frac{1}{|x|}$ und somit auch $x^{-k} e^{-\frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$. Der Grenzwert ist somit 0.

Aufgabe 3 Für $x \neq 0$ ist g Komposition und Produkt differenzierbarer Funktionen und somit nach Produkt- und Kettenregel selbst wieder differenzierbar. Für $x \neq 0$ gilt außerdem

$$g'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} - x^2 \sin \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}.$$

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit im Nullpunkt wird gezeigt, daß der Grenzwert des Differenzenquotienten im Nullpunkt existiert. Sei $h \neq 0$. Dann ist

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h^2 \cos \frac{1}{h}}{h} = h \cos \frac{1}{h}.$$

Wegen $|\cos \frac{1}{h}| \leq 1$ ist mit $h \neq 0$ und $\lim_{h \rightarrow 0} (h \cos \frac{1}{h}) = 0$ die Funktion g auch im Nullpunkt differenzierbar, und es gilt $g'(0) = 0$. Die Funktion g ist ein Beispiel für eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung nicht stetig ist, denn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ existiert nicht, da

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nicht existiert.

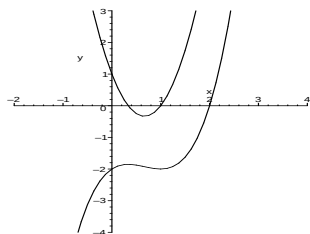
Aufgabe 4 a) Nullstellen: $x = 2$

Extrema: $f'(x) = x^2 + 1 + (x-2)2x = 3x^2 - 4x + 1$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$

$f''(x) = 6x - 4$, $f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ rel. Min in $P_{\min} = (1, -2)$ und $f''(\frac{1}{3}) = -2 < 0 \Rightarrow$ rel. Max in $P_{\max} = (\frac{1}{3}, -\frac{50}{27})$

Monotonie: f monoton steigend, also $f'(x) > 0$, für $x < \frac{1}{3}$ und $x > 1$; f monoton fallend, also $f'(x) < 0$ für $\frac{1}{3} < x < 1$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$, also $6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ und $f'''(\frac{2}{3}) = 6 \neq 0$ und somit $P_w = (\frac{2}{3}, -\frac{52}{27})$.



Funktion f , erste Ableitung f'

b) z.z.: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2} + x^2 - 2$ hat genau 2 Nullstellen auf $\mathbb{R}$. Betrachte f für $x \geq 0$, f stetig und $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = e - 1 > 0$, d.h. f besitzt nach ZWS mindestens eine Nullstelle in $(0, 1)$.

Monotonie: Sei $x > y \geq 0 \Rightarrow x^2 > y^2 \Rightarrow e^{x^2} > e^{y^2}$ (Monotonie der exp-Fkt)

$\Rightarrow f(x) = e^{x^2} + x^2 - 2 > e^{y^2} + y^2 - 2 = f(y)$, d.h. f wächst streng monoton in $[0, \infty)$ und hat somit höchstens eine Nullstelle in $[0, \infty) \Rightarrow f$ hat genau eine Nullstelle in $[0, \infty)$ und da f achsensymmetrisch zur y -Achse, denn

$f(-x) = e^{(-x)^2} + (-x)^2 - 2 = e^{x^2} + x^2 - 2 = f(x)$ hat f genau eine Nullstelle in $(-\infty, 0)$ und somit genau 2 auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe T1 a) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{8x^7 + \frac{2}{x^3}} = (8x^7 + \frac{2}{x^3})^{\frac{1}{5}}$.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5}(8x^7 + \frac{2}{x^3})^{-\frac{4}{5}} \cdot (56x^6 - \frac{6}{x^4})$$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\cos(\frac{x^2-7}{5x}))$. Mit der geschachtelten Funktion $f(x) = g(h(i(x)))$ und mit $i(x) = \frac{x^2-7}{5x}$ und $h(i(x)) = \cos(\frac{x^2-7}{5x})$ erhalten wir $f'(x) = g'(h(i(x))) \cdot h'(i(x)) \cdot i'(x)$ (Kettenregel). Und mit $g'(h(i(x))) = \cos(\cos(\frac{x^2-7}{5x}))$, $h'(i(x)) = -\sin(\frac{x^2-7}{5x})$ und $i'(x) = \frac{10x^2-5x^2+35}{25x^2} = \frac{5x^2+35}{25x^2}$ folgt

$$f'(x) = \cos\left(\cos\left(\frac{x^2-7}{5x}\right)\right) \cdot \left(-\sin\frac{x^2-7}{5x}\right) \cdot \left(\frac{5x^2+35}{25x^2}\right)$$

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \ln(a \sqrt[6]{|x|}) = \ln(a|x|^{\frac{1}{6}})$. Mit der Kettenregel und mit $f(x)$ wie in b) und $i(x) = |x|$, $h(i(x)) = a|x|^{\frac{1}{6}}$ ist $g'(h(i(x))) = \frac{1}{a \sqrt[6]{|x|}}$, $h'(i(x)) = \frac{1}{6}a|x|^{-\frac{5}{6}}$ und

$$i'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{a \sqrt[6]{x}} \cdot \frac{1}{6}ax^{-\frac{5}{6}}, \quad \text{für } x > 0$$

$$\text{bzw. } f'(x) = \frac{1}{a \sqrt[6]{|x|}} \cdot \frac{1}{6}ax^{-\frac{5}{6}}, \quad \text{für } x < 0$$

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(\frac{1}{e^{x^2}}) = \arcsin(e^{-x^2})$. Die Ableitung von $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Mit der Kettenregel (und $x = e^{-x^2}$) ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(e^{-x^2})^2}}(-2xe^{-x^2}) = \frac{-2x}{\sqrt{1-e^{-2x^2}e^{x^2}}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}\sqrt{e^{2x^2}}} \\ &= \frac{-2x}{\sqrt{e^{2x^2}-e^{-2x^2}} \cdot e^{2x^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}} \end{aligned}$$

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 \cos^2 x + \ln(1+x^2))^{\frac{1}{5}}$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(3 \cos^2 x + \ln(1+x^2))^{-\frac{4}{5}}(-6 \sin x \cos x + \frac{1}{1+x^2}(2x))$$

0. f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sin^2 x}$, $f'(x) = 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x}$

Aufgabe T2 a) $f_1(x) = x^{(x^x)} \implies f'_1(x) = \frac{d}{dx} \left(x^{(x^x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(e^{(x^x) \ln x} \right) = e^{(x^x) \ln x} \left(\frac{d}{dx} (x^x \ln x) \right)$
 $= x^{(x^x)} \left(\frac{d}{dx} (x^x) \ln x + x^x \frac{1}{x} \right) = x^{(x^x)} \left(\frac{d}{dx} (e^{x \ln x}) \ln x + \frac{x^x}{x} \right) = x^{(x^x)} \left(e^{x \ln x} \frac{d}{dx} (x \ln x) \ln x + \frac{x^x}{x} \right)$
 $= x^{(x^x)} (x^x (\ln x + 1) \ln x + \frac{x^x}{x}) = x^{(x^x)} x^x ((\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x})$

b) $f_2(x) = \underbrace{(x^x)^x}_{=g(x)}$. Ist $h : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ eine differenzierbare Funktion auf $I \subset \mathbb{R}$, so haben

wir unter Verwendung der "logarithmischen Ableitung" (Kettenregel):

$\frac{d}{dx} \ln h(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$, also $h'(x) = h(x) \frac{d}{dx} \ln h(x)$. Dies verwenden wir und erhalten so
 $f'_2(x) = f_2(x) \frac{d}{dx} (x \ln(g(x))) = f_2(x) \frac{d}{dx} (x^2 \ln x) = (x^x)^x (2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}) = (x^x)^x x (2 \ln x + 1)$

c) $f_3(x) = x^{(x^\alpha)} \implies f'_3(x) = \frac{d}{dx} (x^{(x^\alpha)}) = \frac{d}{dx} (e^{(x^\alpha) \ln x}) = e^{(x^\alpha) \ln x} \frac{d}{dx} (x^\alpha \ln x)$
 $= x^{(x^\alpha)} (\alpha x^{\alpha-1} \ln x + x^{\alpha-1}) = x^{(x^\alpha)} x^{\alpha-1} (\alpha \ln x + 1)$

d) $f_4(x) = x^{(\alpha^x)} \implies f'_4(x) = \frac{d}{dx} (x^{(\alpha^x)}) = \frac{d}{dx} (e^{(\alpha^x) \ln x}) = e^{(\alpha^x) \ln x} (\alpha^x \ln a \ln x + \alpha^x \frac{1}{x})$
 $= x^{(\alpha^x)} \alpha^x (\ln a \ln x + \frac{1}{x})$

d) $f_5(x) = \alpha^{(x^x)} \implies f'_5(x) = \frac{d}{dx} (\alpha^{(x^x)}) = \alpha^{(x^x)} \ln \alpha \frac{d}{dx} (x^x)$ und da $\frac{d}{dx} (x^x) = x^x (\ln x + 1)$ (siehe a)) $\implies f'_5(x) = \alpha^{(x^x)} \ln \alpha x^x (\ln x + 1)$

Aufgabe T3 Die Funktion f erfüllt in $(0, 1]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Eigenschaften a) bis d). Betrachte deshalb $x = 0$

a) $\alpha \leq 0$: Wegen $\sin(\frac{4k+1}{2}\pi) = 1$, ($k \in \mathbb{Z}$) liefert $x_k = \frac{1}{(\frac{4k+1}{2}\pi)^2}$:

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x_k}} = 1 \neq f(0) = 0$, also für $\alpha = 0$ in 0 unstetig.

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x_k^{|\alpha|}} \sin \frac{1}{\sqrt{x_k}} = \infty$, also für $\alpha < 0$ ist f in $x = 0$ unstetig.

$\alpha > 0$: Da $\sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ beschränkt ist, gilt $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 = f(0)$, also f in $x = 0$ stetig.

b) Ist f in $x = 0$ unstetig, dann auch nicht differenzierbar. Betrachte daher: $\alpha > 0$.

$0 < \alpha < 1$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ existiert nicht, da mit x_k wie in a)

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x_k^{1-\alpha}} \sin \frac{1}{\sqrt{x_k}} = \infty$. Also f in $x = 0$ nicht differenzierbar.

$\alpha = 1$: wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x_k}} = 1$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x'_k}} = 0$ mit $x'_k = \frac{1}{(k\pi)^2}$ existiert $f'(0)$ nicht und somit f nicht differenzierbar in 0.

$\alpha > 1$: hier ist $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ und somit f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

c) Wir betrachten wegen b) nur $\alpha > 1$. Für $x \in (0, 1]$ ist $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} + x^{\alpha} (-\frac{1}{2}) x^{-\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $= \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} x^{\alpha-\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$

$1 < \alpha < \frac{3}{2}$: Mit $x_k = \frac{1}{(2k\pi)^2}$ ist $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2x_k^{\frac{3}{2}-\alpha}} \right) = -\infty$, also f' unbeschränkt.

$\alpha \geq \frac{3}{2}$: $|f'(x)| = |\alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} x^{\alpha-\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}| \leq \alpha \underbrace{|x^{\alpha-1}|}_{\leq 1} \underbrace{|\sin \frac{1}{\sqrt{x}}|}_{\leq 1} + \frac{1}{2} \underbrace{|x^{\alpha-\frac{3}{2}}|}_{\leq 1} \underbrace{|\cos \frac{1}{\sqrt{x}}|}_{\leq 1}$

$\leq \alpha + \frac{1}{2}$, f' also beschränkt.

d) $\alpha = \frac{3}{2}$: $x_k = \frac{1}{(2k\pi)^2}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha x_k^{\alpha-1} \sin(2k\pi) - \frac{1}{2} \cos(2k\pi)) = -\frac{1}{2} \neq f'(0) = 0$, also f' für $\alpha = \frac{3}{2}$ unstetig.

$\alpha > \frac{3}{2}$: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\alpha x^{\alpha-1}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin \frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{beschränkt}} - \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{2} x^{\alpha-\frac{3}{2}}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\cos \frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{beschränkt}} = 0 = f'(0)$, also für

$\alpha > \frac{3}{2}$ ist die Funktion f stetig differenzierbar.

Aufgabe T4 Mit der Abkürzung D^k für $\frac{d^k}{dx^k}$ lautet die Behauptung

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D^{n-k}f)(D^k g) \quad (\text{IV}).$$

Diese Formel erinnert an den binomischen Lehrsatz und kann analog dazu mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

Induktionsanfang: $n = 0$, klar.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$.

$$\begin{aligned} D^{n+1}(fg) &= D(D^n(fg)) \stackrel{(IV)}{=} D\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k}f D^k g\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D^{n+1-k}f D^k g + D^{n-k}f D^{k+1}g) \\ &= (D^{n+1}f)g + \sum_{k=1}^n \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} D^{n+1-k}f D^k g + \binom{n}{n} f D^{n+1}g \\ &= \binom{n+1}{0} D^{n+1}f D^0 g + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} D^{n+1-k}f D^k g + \binom{n+1}{n+1} D^0 f D^{n+1}g \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} D^{n+1-k}f D^k g. \end{aligned}$$

Mit der Leibnizschen Formel und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion kann man den Binomischen Lehrsatz erhalten. Sei hierzu $(\frac{d}{dt})^k e^{t\xi} = \xi^k e^{t\xi}$, wobei $\xi \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Wenden wir $(\frac{d}{dt})^n$ auf beide Seiten der Gleichung

$$e^{t(x+y)} = e^{tx} e^{ty},$$

an, so erhalten wir

$$(x+y)^n e^{t(x+y)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} e^{tx} y^k e^{ty}.$$

Setzen wir nun $t = 0$, so erhalten wir den Binomischen Lehrsatz.