UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Prof. Dr. Guido Schneider
Dipl.-Math. Oliver Zink
Dipl.-Math. oec. Norbert Breindl

WS 2002/2003
10.01.2003

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Definitionsbereich: Die Funktion f ist für $x = 0$ nicht definert $\Longrightarrow D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
Nullstellen: Die Funktion besitzt keine Nullstellen, da $e^{\alpha\frac{1}{x}} \neq 0$ und $\frac{1}{\alpha^2+x^2} \neq 0$ für alle $x \in D$.
Verhalten am Rande des Defintionsbereichs: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
in der Nähe von $x = 0$:
i) $\alpha = 0 : \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}e^0 = \infty$
ii) $\alpha > 0 : \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\alpha^2+x^2}e^{\alpha\frac{1}{x}} = \infty$
$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{\alpha^2+x^2}e^{\alpha\frac{1}{x}} = 0$
iii) $a < 0 : \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\alpha^2+x^2}e^{\alpha\frac{1}{x}} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{\alpha^2+x^2}e^{\alpha\frac{1}{x}} = \infty$
Extrema: $f'(x) = -\frac{2x}{(\alpha^2+x^2)^2}e^{\frac{\alpha}{x}} - \frac{\frac{\alpha}{x^2}}{\alpha^2+x^2}e^{\frac{\alpha}{x}} = e^{\frac{\alpha}{x}}\frac{1}{\alpha^2+x^2}(-\frac{2x}{\alpha^2+x^2} - \frac{\alpha}{x^2})$,
$f'(x) = 0$, wenn $-\frac{2x}{\alpha^2+x^2} - \frac{\alpha}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow -2x^3 - \alpha^3 - x^2\alpha = 0 \Longleftrightarrow 2x^3 + \alpha^3 + x^2\alpha = 0.$
Polynomdivision: $(x = -\alpha)$ ist Nullstelle

$$
\begin{array}{l}
\;\;(2x^3 + \alpha^3 + x^2\alpha) : (x + \alpha) = 2x^2 - \alpha x + \alpha^2 \\
\underline{-(2x^3 + 2\alpha x^2)} \\
\qquad -\alpha x^2 + \alpha^3 \\
\qquad \underline{-(-\alpha x^2 - \alpha^2 x)} \\
\qquad\quad \alpha^2 x + \alpha^3 \\
\qquad\quad \underline{-(\alpha^2 x + \alpha^3)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2 - \frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha^2}{2} = 0 \Longleftrightarrow (x - \frac{\alpha}{4})^2 = -\frac{7\alpha^2}{16} \Longrightarrow$ keine weitere Lösung.
Die einzig mgl. Extremstellen sind: $\alpha > 0 \Longrightarrow x = -\alpha$ und $\alpha < 0 \Longrightarrow x = \alpha$
Es handelt sich jeweils um ein Maximum, denn z.B. für $x = \alpha$ $(\alpha < 0)$ haben wir
$f(x) > 0\ \forall x \in D\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$.
Skizzen:

Bild1: $\alpha = 0$

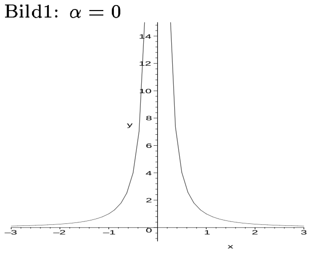


Bild2: $\alpha = 0.2$

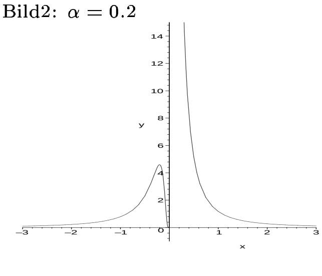
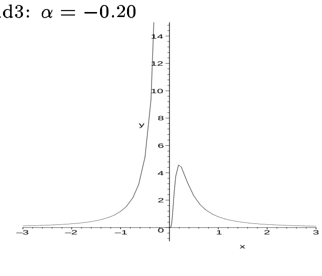


Bild3: $\alpha = -0.20$



Aufgabe 2 **a)** Betrachte die Funktion $f(x) = \cos x$. Zu jedem $x > 0$ existiert dann nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (0, x)$, so daß

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \quad \text{also} \quad -\sin\xi = \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Insbesondere gibt es zu $x_n = \frac{1}{n}$ ein solches ξ_n. Für $x_n = \frac{1}{n}$ ist dann $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$ und es gilt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$n(1 - \cos\frac{1}{n}) = \frac{1 - \cos x_n}{x_n} = \sin\xi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sin 0 = 0$$

b) Wir nehmen hier $f(y) = \cos\sqrt{y}$. Zu jedem $x > 1$ existiert dann $\xi \in (x-1, x+1)$, so daß

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi), \quad \text{also} \quad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}.$$

Dann ergibt sich als Abschätzung $|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}| \leq \frac{1}{\sqrt{\xi}}$ und da für $x \to \infty$ auch $\xi \to \infty$, ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}) = 0$
$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = \sin \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = 0$

Aufgabe 3 **a)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{x \sin x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x+\sin x}{\sin x + x\cos x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1+\cos x}{2\cos x - x\sin x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$

c) mit b) folgt: $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{(\lim_{x\to 0} x\ln x)} = e^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan 5x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \frac{3}{5}(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x})^2 \overset{l'H}{=} \frac{3}{5}(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x})^2 = \frac{3}{5}(\frac{5}{-3})^2 = \frac{5}{3}$

e) Wir betrachten die Taylorentwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$.
$f(x) = \ln(1+x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$.
Das zweite Taylorpolynom ist somit $T_2(x;0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x - \frac{x^2}{2}$.
Für $x \geq 0$ existiert ein $\xi \in [0,x]$ mit $R_2(x;0) = f(x) - T_2(x;0) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = \frac{1}{3(1+\xi)^3}x^3 \geq 0$.
Für $f(\frac{1}{x})$ und $x \geq 1$ ist $\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + R_2(\frac{1}{x};0) \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} > 0$ und es gilt mit $x \geq 1$
$0 \leq \frac{e^{-x^2}}{\ln(1+\frac{1}{x})} \leq \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}} = \frac{2x^2\cdot e^{-x^2}}{2x-1} \leq 2x^2 \cdot e^{-x^2} \longrightarrow 0 \ (n \to 0)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2}(1+e^{-2x}) = \frac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{x\to -1+}(x+1)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to -1+} \frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{x+1}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to -1+} \frac{\frac{\pi}{2\cos^2(\frac{\pi x}{2})}}{-(\frac{1}{x+1})^2} = -\frac{\pi}{2}(\lim\limits_{x\to -1+} \frac{x+1}{\cos(\frac{\pi x}{2})})^2$
$\overset{l'H}{=} -\frac{\pi}{2}(\lim\limits_{x\to -1+} \frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi x}{2})})^2 = -\frac{\pi}{2}\cdot(\frac{1}{\frac{\pi}{2}})^2 = -\frac{2}{\pi}$

Aufgabe 4 **a)** $f(x) = (4x+5)^{-\frac{1}{3}}$, $f'(x) = 4(-\frac{1}{3})(4x+5)^{-\frac{4}{3}}$,
$f''(x) = 4^2(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(4x+5)^{-\frac{7}{3}} \ldots f^{(k)}(x) = (-\frac{4}{3})^k(1\cdot 4\ldots(3k-2))(4x+5)^{-\frac{1}{3}-k}$
$\Longrightarrow T(x;0) = 3^{-\frac{2}{3}} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-\frac{4}{3})^k \frac{1\cdot 4\ldots(3k-2)\cdot 3^{-(\frac{6k+2}{3})}}{k!}(x-1)^k$.

b)

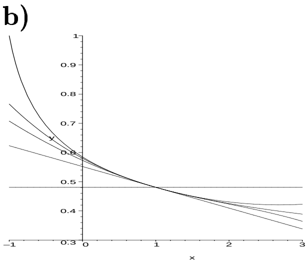


Bild4: Funktion f und die Taylorpolynome $T_i(x;1)$ für $i = 0,1,2,3$

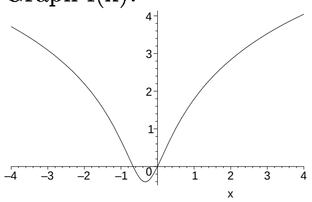
c) $T_3(x;1) = 3^{-\frac{2}{3}} - 4\cdot 3^{-\frac{11}{3}}(x-1) + 32\cdot 3^{-\frac{20}{3}}(x-1)^2 - 896\cdot 3^{-\frac{32}{3}}(x-1)^3$
Fehlerabschätzung (Approximation von $f(\frac{3}{2})$ durch $T_3(\frac{3}{2};1)$):
$|f(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};1)| = |R_3(\frac{3}{2};1)| = |\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(\frac{3}{2}-1)^4| = |(-\frac{4}{3})^4\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot(4\xi+5)^{-\frac{13}{3}}}{4!}(\frac{3}{2}-1)^4|$.
Gemäß Taylorschen Satz gilt $1 = x_0 < \xi < x = \frac{3}{2}$ und $(4\xi+5)^{-\frac{13}{3}}$ kann nach oben mit $\xi = 1$ abgeschätzt werden: $|f(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};1)| \leq |\frac{4^4\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot 9^{-\frac{13}{3}}}{3^4\cdot 4!\cdot 2^4}| = \frac{560}{3^{\frac{41}{3}}} \leq 1.69\cdot 10^{-4}$.

d) $T_0(\frac{3}{2};1) = 3^{\frac{-2}{3}} = 0.480749,\ \ T_1(\frac{3}{2};1) = T_0(\frac{3}{2};1) - 2\cdot 3^{\frac{-11}{3}} = 0.445138,$
$T_2(\frac{3}{2};1) = T_1(\frac{3}{2};1) + 8\cdot 3^{\frac{-20}{3}} = 0.450414,\ \ T_3(\frac{3}{2};1) = T_2(\frac{3}{2};1) - 112\cdot 3^{\frac{-32}{3}} = 0.449502.$
Da $f(\frac{3}{2}) = 11^{-\frac{1}{3}} = 0.449644$ ist der tatsächliche Fehler $|f(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};1)| = 0.00014169$.

Aufgabe T1 $f(x) = \ln(3x^2+2x+1) = \ln(3(x+\frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3})$
Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
Symmetrie: Die verschobene Funktion $g(x) := f(x-\frac{1}{3})$ ist gerade, denn
$g(x) = f(x-\frac{1}{3}) = \ln(3x^2+\frac{2}{3}) = \ln(3(-x)^2+\frac{2}{3}) = g(-x)$
und somit $f(x)$ achsensymmetrisch zu $x = -\frac{1}{3}$.
Pole: keine
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln(3x^2+2x+1) = \infty$
Nullstellen: $\ln(3x^2+2x+1) = 0 \Longrightarrow 3x^2+2x = 0 \Longrightarrow x_1 = -\frac{2}{3},\ x_2 = 0$
Extrema und Monotonie: $f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x+1} = 0 \Longrightarrow x_3 = -\frac{1}{3}$, also
$f'(x) < 0$ für $x \in (-\infty, x_3)$ und f streng monoton fallend bzw.
$f'(x) > 0$ für $x \in (x_3, \infty)$ und f streng monoton steigend
$\Longrightarrow x_3$ ist strenges globales Minimum.
Wendepunkte und Konvexität: $f''(x) = \frac{-18((x+\frac{1}{3})^2-\frac{2}{9})}{(3x^2+2x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x_4 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3},\ x_5 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\Longrightarrow f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in (-\infty, x_4) & \Longrightarrow & \text{f ist streng konkav} \\ > 0 & \text{für } x \in (x_4, x_5) & \Longrightarrow & \text{f ist streng konvex} \\ < 0 & \text{für } x \in (x_5, \infty) & \Longrightarrow & \text{f ist streng konkav.} \end{cases}$$

Es gibt somit 2 Wendepunkte x_4 (Rechts-Linkskurve) und x_5 (Links-Rechtskurve).
Graph f(x):

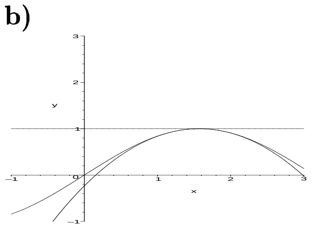


Aufgabe T2 **a)** Die Funktion f ist eine auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall ($I = [-2,2]$ kompakt) und stetige Funktion (Polynom) $\Longrightarrow$ globales Max. und Min. wird angenommen (Min-Max-Eigenschaft).

b) $f(x) = x^x = e^{x\ln x} > 0,\ f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e}$.
Monotoniebetrachtung: $0 < x < \frac{1}{e} \Longrightarrow \ln x + 1 < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ ist streng monoton fallend in $(0, \frac{1}{e})$
$x > \frac{1}{e} \Longrightarrow \ln x + 1 > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ ist streng monoton wachsend in $(\frac{1}{e}, \infty)$. Bei $x = \frac{1}{e}$ liegt somit ein globales Minimum.

Aufgabe T3 **a)** Es ist $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = f(x)$ und
$f^{(4k)}(x) = f(x) = \sin x,\ f^{(4k+1)}(x) = \cos x,\ f^{(4k+2)}(x) = -\sin x,\ f^{(4k+3)}(x) = -\cos x.$
Da $f^{(4k+1)}(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $f^{(4k+3)}(\frac{\pi}{2}) = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist
$T(x;\frac{\pi}{2}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}$.

b)



c) $T_3(x;\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2$, Fehlerabschätzung:
$|f(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2})| = |R_3(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2})| = |\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(\frac{3-\pi}{2})^4| = |\frac{\sin(\xi)}{4!}(\frac{3-\pi}{2})^4|$,
nach dem Taylorschen Satz gilt $\frac{3}{2} = x < \xi < x_0 = \frac{\pi}{2}$ und somit können wir $\sin\xi$ nach oben abschätzen mit $\xi = \frac{\pi}{2}$ und erhalten als Fehler

$$|f(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2})| \leq |\frac{1}{4!}(\frac{3-\pi}{2})^4| < 1{,}05\ldots \cdot 10^{-6}$$

d) Taylorpolynome: $T_0(x;\frac{\pi}{2}) = 1$, $T_1(x;\frac{\pi}{2}) = 1$, $T_2(x;\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2$, $T_3(x;\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2$. Auswertung von $T_3(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{2}(\frac{3-\pi}{2})^2 = 0{,}99749394$ und Vergleich mit $f(\frac{3}{2}) = \sin\frac{3}{2} = 0{,}997494986$ liefert den Fehler $|f(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2})| = 1{,}05... \cdot 10^{-6}$

Aufgabe T4 **a)** Mit $\ln(e^{3x}-5x)^{x^{-1}} = \frac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}$ erhalten wir
$\lim\limits_{x\to\infty} \ln(e^{3x}-5x)^{x^{-1}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{27e^{3x}}{9e^{3x}} = 3.$
Also $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{3x}-5x)^{x^{-1}} = e^3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{a\cos ax}{1} = a$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)+\tan^2 x}{x\sin x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(2x)+2\frac{\sin x}{\cos^3 x}}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{4\sin(2x)}{2x} + \frac{2}{\cos^3 x}\cdot\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}$
$= \frac{4+2}{1+1} = 3$, denn für $x \to 0: \frac{\sin(2x)}{2x} \to 1$, $\frac{2}{\cos^3 x} \to 2$, $\frac{\sin x}{x} \to 1$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x + x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{4x^3} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos x + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{12x^2}$
$\overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 2x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}}{24x} \overset{l'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x + (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 6x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 9x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 15x^4(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}}{24}$
$= \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{x^2} \ln\frac{\arctan x}{x} \overset{l'H}{=} 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\arctan x} \cdot \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2}}{2x} = 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^3(1+x^2)} \overset{l'H}{=}$
$3 \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2}}_{=1} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^3} \overset{l'H}{=} 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-1-2x\arctan x}{6x^2} = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = -1.$
Also $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{\arctan x}{x})^{\frac{3}{x^2}} = e^{-1}$

f) Für $x > 0$ gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \tan x \ln(\arcsin x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\arcsin x)}{\frac{1}{\tan x}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-\sin^2 x)$
$\overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} -\frac{2\sin x\cos x}{-\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\arcsin x + 1} = 0$ und somit
$\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin x)^{\tan x} = e^0 = 1$
$(\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x,\ (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x})$