

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Diskutiere die Funktion $f(x) = x^3 - x^2$.

Diskussionspunkte: Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrien, Verhalten im Unendlichen, Nullstellen, lokale und globale Extrema, Monotonie, Wendepunkte, Konvexität. Fertige eine Zeichnung der Funktion f an.

Aufgabe 2 Berechne die Taylorreihe von $f(x) = e^{x^4}$ und bestimme den Konvergenzradius.

Aufgabe 3 Untersuche die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

- a) $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$
- b) $g_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{(nx)^2}{1+(nx)^3}$
- c) $h_n : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \frac{(nx)^2}{1+(nx)^3}$
- d) $k_n :]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, \quad k_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$
- e) $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin x^2}{k^3}$

Aufgabe 4 Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 - 4n^3)z^n$
- b) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{5\nu}}{(4+(-1)^\nu)^{3\nu}}$
- c) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\ln k}{k}} z^k$

Aufgabe T1 Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} 32x^n$
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$
- c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh n)x^n$
- d) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_k = \begin{cases} -k, & \text{falls } k \text{ Quadratzahl} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe T2 Gegeben sei die Funktion $f :]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{e^{2x-1}-1}{\cos(\pi x)}$.

- a) Untersuche das Verhalten der Funktion f am Rand des Definitionsbereichs.
- b) Berechne von der Potenzreihenentwicklung von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Koeffizienten bis zum Glied von x^3 .

Aufgabe T3 Untersuche die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

- a) $f_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x+nx^2+nx}{1+nx}$
- b) $g_n : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{x+nx^2+nx}{1+nx}$
- c) $p_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_n(x) = (1-x)^n$
- d) $q_n : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad q_n(x) = (1-x)^n$

Aufgabe T4 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\sqrt[3]{1+x}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

- a) Bestimme das Taylorpolynom $T_2(x; 0)$ im Intervall $|x| \leq \frac{1}{4}$.
- b) Mit welcher Genauigkeit wird die Funktion f durch das Taylorpolynom $T_2(x; 0)$ im Intervall $|x| \leq \frac{1}{4}$ approximiert?
- c) Zeichne den Graphen der Funktion f , des Taylorpolynoms $T_2(x; 0)$ und des Restglieds $R_2(x; 0)$.

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.