UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
J. Bitzer

WS 2003/2004
21.10.2003

2. Übungsblatt – Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1) Entwickeln Sie $\frac{1}{7}$ in einen Dualbruch.

2) a) In einer zehnköpfigen Kommission habe jedes Mitglied eine Stimme. Wieviel mögliche Mehrheiten (Teilmengen von mindestens sechs Elementen) gibt es?

b) Zeigen Sie allgemein: In einer $2n$–köpfigen Kommission gibt es $\frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)$ Möglichkeiten der Mehrheitsbildung.

3) Bei einem Festakt sollen sechs Reden gehalten werden. Dafür stehen vier Regierungs- und vier Oppositionspolitiker sowie zwei Bürgerrechtler zur Verfügung; jeder darf höchstens eine Rede halten.

a) Wieviele mögliche Rednerlisten gibt es?

b) Wieviele gibt es, wenn jemand von der Regierung die erste Rede halten soll?

c) Wieviele gibt es, wenn mindestens ein Bürgerrechtler sprechen soll?

4) Untersuchen Sie, ob folgende Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum oder Maximum besitzen, und bestimmen Sie dieses gegebenenfalls.

a) $\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) $\left\{x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R},\, 0 < x \leq 10\right\}$

c) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

d) $\left\{\frac{m+1}{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 2 > 5,\, x < 0\}$

5) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$

c) $a_n = 3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar.

– bitte wenden –

6) Die Funktion $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ genüge für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ der Gleichung

$$f(n) \cdot f(m) = f(n+m) + f(n-m)\ .$$

Es sei $f(1) = \frac{17}{4}$.

a) Rechnen Sie nach, dass $f(0) = 2$ gilt.

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $\quad f(n) = 4^n + \dfrac{1}{4^n} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

c) Zeigen Sie, dass $f(n) = 4^n + 4^{-n}$ sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

7) Die Zahlen a_n, $n \in \mathbb{N}$, sind rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} \qquad (n \geq 2).$$

Zeigen Sie:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad a_n = \dfrac{1}{2}(3^{n-1} + (-1)^{n-1})$.

8) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$ mit

a) $|x-4| = |x+1|$

b) $|x-1|\,|x+3| \leq 3$

c) $\dfrac{3x}{1+|x|} < 4x^2$

d) $|7 - |x-5|| \leq 3$