UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. O. Knab
J. Bitzer

WS 2003/2004
25.11.2003

7. Übungsblatt – Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1) **a)** Bestimmen Sie die Konstanten a, $b \in \mathbb{R}$ so, daß die Funktion f, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x+3}{x+1} + \dfrac{a}{x} & \text{falls } x < -1 \\ |2-x| + 3b & \text{falls } x \geq -1\,, \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ stetig ist und $f(1) = 4$ erfüllt.

b) Für $x \in \mathbb{R}$ wird mit $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}\;,$$

und überprüfen Sie f auf Stetigkeit.

c) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : (3, \infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$$

monoton und stetig ist, und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

d) Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Abbildung:

$$f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2 + 2x - 15, x^3\}, & x \in [-7,-5] \cup [-1,3] \\ x + 5, & x \in (-5,-1) \end{cases}$$

2) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{n}\left(\left(1 + \frac{n}{x}\right)^n - 1\right)$

3) Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen (f_n) in den angegebenen Intervallen auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz.

a) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ in [0,1]
(Hinweis: Bestimmen Sie $f_n(\frac{1}{n+1})$.)

b) $f_n(x) = \dfrac{x + nx^2 + nx}{1 + nx}$ $I_1 = [0, \infty),\quad I_2 = [a, \infty),\ a > 0.$

c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ $I_1 = [0, 1],\quad I_2 = [a, 1],\ a > 0.$

d) $f_n(x) = \dfrac{(-x^2)^n}{1 + x^{2n}}$ $I_1 = \mathbb{R},\quad I_2 = (a, b),\ a < b.$

– bitte wenden –

4) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen in den jeweiligen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ auf $I=[0,1]$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ auf $I=\mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(1+x+x^2)}$ auf $I=\mathbb{R}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}$ auf $I=\mathbb{R}$

5) Durch

$$f:\ [0,2]\to\mathbb{R}\ ,\quad x\mapsto f(x)=\frac{x+2}{x+3}$$

ist eine Funktion gegeben.

a) Zeigen Sie, daß f monoton ist und das Intervall $[0,2]$ in sich abbildet.

b) Durch

$$(*)\qquad x_0\in[0,2]\ ,\quad x_{n+1}=f(x_n)\qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

ist eine Folge (x_n) definiert. Überlegen Sie sich, daß (x_n) beschränkt und monoton ist. Bestimmen Sie $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ($\xi$ heißt *Fixpunkt* von f, $(*)$ *Fixpunktiteration.*)

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 1. Übungsklausur: <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

Wer an der **1. Übungsklausur** zur Vorlesung HM I teilnehmen möchte, kann sich noch bis Donnerstag, 27. November (13 Uhr) in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen.
Bitte beachten Sie, daß die Listen nach Fachrichtungen getrennt sind, und merken Sie sich den **Hörsaal**, in dem Sie schreiben werden.

Zur **Übungsklausur am Samstag, dem 6. Dezember, 8–10 Uhr** bringen Sie bitte Schreibgerät und Studierendenausweis mit; Papier wird gestellt. Zulässige Hilfsmittel sind alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z.B. Mitschriften, Übungsblätter, alte Klausuren). Nicht zugelassen sind lose Blätter sowie elektronische Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner).