**UNIVERSITÄT KARLSRUHE**
**MATHEMATISCHES INSTITUT I**
**Dr. O. Knab**
**J. Bitzer**

**WS 2003/2004**
**09.12.2003**

# 9. Übungsblatt – Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1) Beweisen Sie folgende Aussagen.

   a) Für jedes $\alpha > 0$ gilt: $\ln x = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$
   b) $x\sin(x^{-1}) = O(x)$ für $x \to 0$
   **c)** $\sin x = x + o(x^2)$ für $x \to 0$
   d) $\sqrt{1+x^2} = x + O(1/x)$ für $x \to \infty$

2) Zeigen Sie die Identitäten

   a) $(\cosh z + \sinh z)^n = \cosh nz + \sinh nz \qquad$ für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$

   **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \qquad$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{2m\pi | m \in \mathbb{Z}\}$

   c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k!} = \cos(\sin x)e^{\cos x}$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{k!} = \sin(\sin x)e^{\cos x}$

   d) $\operatorname{Arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad (x \in \mathbb{R})$

   e) $\displaystyle\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (|x| < 1)$

3) a) Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1\,. \qquad (*)$$

   *Hinweis*: Setzen Sie $\ln(x+1) = y$, und schreiben Sie den zu berechnenden Grenzwert als Grenzwert für die Exponentialfunktion.

   b) Folgern Sie hieraus:
   Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x\,.$$

   *Hinweis*: Ersetzen Sie in $(*)$ $x$ durch $\dfrac{x}{n}$ (mit festem $x$).

**4)** Die Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}\,.$$

Bestimmen Sie $f(0)$ so, dass die fortgesetzte Funktion auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung $f'$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$, und zeigen Sie, dass $f'$ in jedem Intervall $(-r, r)$ mit $r > 0$ beliebig große Werte annimmt.

– bitte wenden –

5) Berechnen Sie $f^{(20)}(0)$ von

**a)** $f(x) = (x-1)^{50}e^x$ b) $f(x) = x\sin(x)$ c) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{8}}$

6) **a)** Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(x;0)$ der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ und zeigen Sie, dass für $x \geq 0$ die Abschätzung

$$0 \leq \ln(1+x) - T_4(x;0) \leq \frac{1}{5}x^5$$

gilt.

b) Bestimmen Sie $a, b, k \in \mathbb{R}$ so, dass die Formel

$$|\ln(2+x) - a - bx| \leq kx^2$$

für $|x| \leq 1$ gilt.

c) Approximieren Sie die Funktion $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ durch das Taylorpolynom $T_2(x;\frac{1}{2})$, und geben Sie ein $k > 0$ an, so dass für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$|f(x) - T_2(x;\frac{1}{2})| \leq k|x - \frac{1}{2}|^3$$

d) Berechnen Sie

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\sqrt{1 - \frac{1}{50}}$$

bis auf einen Fehler kleiner als $10^{-6}$ durch ein geeignetes Taylorpolynom.

7) Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2}$$

um den Nullpunkt, und geben Sie den Konvergenzradius der Reihe an.

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> 1. Übungsklausur: <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

- Die korrigierten Übungsklausuren können ab 16.12. (Dienstag) im Sekretariat abgeholt werden.
- Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am 18.12. (Donnerstag) um 13.15 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.