

10. Übungsblatt – Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1) Zeigen Sie die folgenden Identitäten

a) $2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn}(x)$ für $|x| > 1$

b) $\arctan\left(\tanh \frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{4} = \arctan(e^x)$ für $x \in \mathbb{R}$

2) Zeigen Sie mit Hilfe der Mittelwertsätze:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^2 + a^2} - \sqrt[3]{n^2}\right) = 0$

c) $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$ für $x > 0$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}\right)$

3) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := x + \sin(x) \cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin x}$

4) Gegeben sind die Funktionen f_t durch

$$f_t(x) = \ln\left(\frac{x^2}{4} + t\right) \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } t \in \mathbb{R}^+.$$

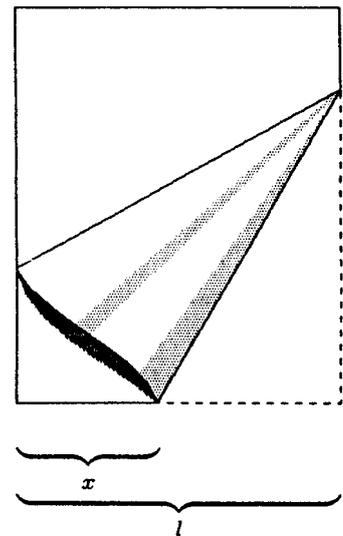
- a) Untersuchen Sie das Schaubild von f_t für $t = \frac{1}{2}$ auf Schnittpunkte mit der x -Achse sowie auf Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie das Schaubild für $|x| \leq 6$.
- b) Für welche Werte von t hat das Schaubild K_t von f_t gemeinsame Punkte mit der x -Achse? Berechnen Sie den Tiefpunkt und die Wendepunkte von K_t . Welche Gleichung hat die Ortskurve der Wendepunkte aller K_t ?
- c) Bestimmen Sie t^* so, dass die Wendetangenten von K_{t^*} durch den Ursprung gehen. Zeichnen Sie K_{t^*} in das vorhandene Koordinatensystem ein.

5) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \quad \text{für } x \neq 1.$$

- a) Berechnen Sie die Koordinaten und den Typ der Extremwerte.
 - b) Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptoten und skizzieren Sie den Graphen der Funktion f .
 - c) Vom Punkt $P(2|4)$ werden an die Kurve Tangenten gelegt. Bestimmen Sie die Abszissen ihrer Berührungspunkte.
- 6) Von einem Kanal der Breite a gehe unter einem rechten Winkel ein anderer Kanal mit der Breite b aus. Die Wände der Kanäle seien geradlinig. Wie lang darf ein Balken höchstens sein, der von einem Kanal in den anderen geflößt werden soll.

7) Ein rechteckiges Papier der Breite l werde so gefaltet, dass die rechte untere Ecke auf den linken Rand zu liegen kommt. In welchem Abstand x zwischen 0 und $\frac{1}{2}l$ von diesem Rand muss der Knick beginnen, damit die Falzlinie möglichst kurz wird? (Die Höhe des Blattes sei dabei groß genug, so dass der Knick auch für x nahe $\frac{1}{2}l$ immer auf dem rechten Rand endet.)



DRUCKFEHLER:



Bei den Hinweisen auf dem 9. Übungsblatt hat sich leider ein Druckfehler eingeschlichen. Der Termin für die **Fragen zur Korrektur** der 1. Übungsklausur ist natürlich nicht erst am 28.12., sondern bereits am

Donnerstag, dem 18.12., von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 .