

13. Übungsblatt – Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen  
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1) Untersuchen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit der auftretenden reellen Parameter, die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

a)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(a+x)} dx \quad (a > 0)$       b)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}(e^x - e^{-x})} dx$   
c)  $\int_0^1 \frac{1}{\ln x} dx$       d)  $\int_0^{\infty} \frac{x-1}{(\cosh x - 1) \ln x} dx$   
e)  $\int_1^{\infty} x^\alpha \cos(e^x) dx$       f)  $\int_0^1 x^\alpha e^{-\sqrt{x}} dx$

2) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie ihren Wert.

a)  $\int_5^{\infty} \frac{x-8}{x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x} dx$       b)  $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{|x-1|}}$   
c)  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$       d)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

3) a) Berechnen Sie für die Eulersche Gammafunktion  $\Gamma(x)$  die Werte  $\Gamma\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ ,  $\Gamma\left(\pm\frac{3}{2}\right)$  und  $\Gamma\left(\pm\frac{5}{2}\right)$ . Verwenden Sie dabei ohne Beweis:  $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

b) Zeigen Sie, dass die Funktionalgleichung

$$x \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  gilt.

c) Zeigen Sie, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(-\frac{2k-1}{2}\right) = (-1)^k \cdot \pi$$

4) Beweisen Sie, dass die folgenden Grenzwerte in  $\mathbb{R}$  existieren.

a)  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta \sin(x^2) dx$

b)  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta 2x \sin(x^4) dx$

5) Stellen Sie fest, ob die angegebenen Reihen konvergieren oder divergieren:

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}$

b)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$

c)  $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{a} - 1) \quad (a \geq 0)$

6) Berechnen Sie näherungsweise  $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$  mittels

a) der Trapezregel,

b) der Simpsonregel,

mit jeweils vier Stützpunkten. Geben Sie eine Fehlerabschätzung an.



## 2. ÜBUNGSKLAUSUR:



Wer an der **2. Übungsklausur** zur Vorlesung HM I teilnehmen möchte, kann sich noch bis Donnerstag, 22. Januar (13 Uhr) in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen. Bitte beachten Sie, daß die Listen nach Fachrichtungen getrennt sind, und merken Sie sich den **Hörsaal**, in dem Sie schreiben werden.

Zur **Übungsklausur am Samstag, dem 31. Januar, 8–10 Uhr** bringen Sie bitte Schreibgerät und Studierendenausweis mit; Papier wird gestellt. Zulässige Hilfsmittel sind alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z.B. Mitschriften, Übungsblätter, alte Klausuren). Nicht zugelassen sind lose Blätter sowie elektronische Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner).