UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. oec. N. Breindl

WS 2004/2005
29.10.2004

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Seien folgende Abbildungen $f_i\colon D_i \to \mathbb{R}$ gegeben:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad f_3(x) = x^2 + x + 1.$$

a) Bestimmen Sie für jede Abbildung f_i den maximalen Definitionsbereich $D_i \subseteq \mathbb{R}$ und die Bildmenge $R(f_i) = f(D_i)$.

b) Welche Abbildungen sind injektiv? Geben Sie zu den injektiven Abbildungen jeweils die Umkehrabbildung an.

c) Welche Kompositionen $f_i \circ f_j$ sind erlaubt? Ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ erlaubt?

d) Geben Sie die Abbildungsvorschrift für $f_1 \circ f_2$ explizit an.

Aufgabe 2 Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Weiter sei $h := g \circ f$ die Komposition von f und g.

a) Zeigen Sie durch direkte Beweise:

- **(i)** Sind f und g injektiv, so ist auch h injektiv.
- **(ii)** Sind f und g bijektiv, so ist auch h bijektiv.
- **(iii)** Ist h surjektiv, so ist auch g surjektiv.
- **(iv)** Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

b) Zeigen Sie durch indirekte Beweise (Widerspruchsbeweise):

- **(i)** Ist h surjektiv, so ist auch g surjektiv.
- **(ii)** Ist h injektiv, so ist auch f injektiv.
- **(iii)** Ist g injektiv und h nicht injektiv, so ist f nicht injektiv.
- **(iv)** Ist h injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

c) Widerlegen Sie die folgenden falschen Aussagen durch je ein Gegenbeispiel.

- **(i)** Ist h injektiv, so ist auch g injektiv.
- **(ii)** Ist h surjektiv, so ist auch f surjektiv.
- **(iii)** Ist h nicht injektiv, so gilt: f ist nicht injektiv und g ist nicht injektiv.
- **(iv)** Ist h nicht surjektiv, so gilt: f ist nicht surjektiv und g ist nicht surjektiv.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 Entscheiden Sie, ob folgende Mengen ein Minimum, Maximum, Infimum oder Supremum in $\mathbb{R}$ besitzen und bestimmen Sie diese Werte gegebenenfalls.

a) $A = \{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$, **b)** $B = \left\{x + \dfrac{1}{x} \mid 1 < x \leqslant 4\right\}$,

c) $C = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Aufgabe T1 Es sei X eine beliebige Menge; A und B seien zwei Teilmengen von X mit charakteristischen Funktionen $\chi_A : X \to \{0,1\}$ und $\chi_B : X \to \{0,1\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ gilt.

b) Wie lassen sich die charakteristischen Funktionen der Mengen $C_X(A)$, $A \setminus B$, $A \triangle B$ und $A \cup B$ durch χ_A und χ_B ausdrücken?

Aufgabe T2 Seien A und B beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Dann ist auch $A + B := \{\, x \mid x = a + b$ für ein $a \in A$ und ein $b \in B \,\}$ eine beschränkte Menge und

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \qquad \text{sowie} \qquad \inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

Aufgabe T3 Entscheiden Sie, ob folgende Mengen ein Minimum, Maximum, Infimum oder Supremum in $\mathbb{R}$ besitzen und bestimmen Sie diese Werte gegebenenfalls.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 2\}$, **b)** $B = \left\{\dfrac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 2 > 5,\ x < 0\}$, **d)** $D = \left\{\dfrac{m+1}{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Aufgabe T4 Es seien X und Y Mengen sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann wird das Bild einer Teilmenge A von X als

$$f(A) := \{f(a) \,|\, a \in A\}$$

definiert. Zeigen Sie für beliebige $A, B \subseteq X$ gilt:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Zeigen Sie, Sie dass in b) im Allgemeinen die Gleichheit nicht gilt.

Axiomensystem für die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{R}$, mit den **Verknüpfungen***:*
Addition: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$;
Multiplikation: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$;
sowie einer **Anordnung***, gegeben durch eine Teilmenge, den* **Positivitätsbereich** $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$. *Für diese Daten gilt:*

(K) **Körperaxiome:**
Die Menge $\mathbb{R}$ mit Addition und Multiplikation bildet einen **Körper***.*

(A) **Axiome der Anordnung:**
(A.1) *Es gilt genau eine der Aussagen $x \in \mathbb{R}_+$, $-x \in \mathbb{R}_+$, $x = 0$.*
(A.2) $x, y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}_+$.
(A.3) $x, y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}_+$.

(V) **Vollständigkeitsaxiom**
Jede nicht leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.

Körperaxiome

Addition
Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:
$(x + y) + z = x + (y + z)$,
$x + y = y + x$.
Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, sodaß
$x + 0 = x$,
und sodaß für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein "negatives" $(-x) \in \mathbb{R}$ existiert, mit der Eigenschaft
$x + (-x) = 0$.

Multiplikation
Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, **Assoziativität,**
$x \cdot y = y \cdot x$. **Kommutativität.**
Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$, sodaß $1 \neq 0$ und
$1 \cdot x = x$,
und sodaß für jedes $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, ein "inverses" $x^{-1} \in \mathbb{R}$ existiert, mit der Eigenschaft
$x \cdot x^{-1} = 1$.

Distributivgesetz.

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.