UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. oec. N. Breindl

WS 2004/2005
05.11.2004

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Für die Elemente (a_1, a_2) und (b_1, b_2) der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ sei eine Verküpfung $*$ wie folgt definiert:

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Zeigen Sie, dass durch $(\mathbb{R}^2, *)$ eine abelsche Gruppe gegeben ist.

Aufgabe 2 Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion h gegeben durch

$$h(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

a) Untersuchen Sie die Funktion h auf Monotonie, Beschränktheit und Bijektivität.

b) Überlegen Sie sich, wie das Intervall $(-1, 1)$ bijektiv auf $(0, 1)$ abgebildet werden kann. Geben Sie dann eine Abbildung an, die $\mathbb{R}$ bijektiv auf $(0, 1)$ abbildet.

Aufgabe 3 Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

d) $a_n = 3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar.

Aufgabe 4 Bei einem Festakt sollen sechs Reden gehalten werden. Dafür stehen 4 Regierungsvertreter, 4 Oppositionsvertreter und 2 Bürgerrechtler zur Verfügung. Es darf jeder höchstens eine Rede halten.

a) Wieviele mögliche Rednerlisten gibt es?

b) Wieviele gibt es, wenn jemand von der Regierung die erste Rede halten soll?

c) Wieviele gibt es, wenn mindestens ein Bürgerrechtler sprechen soll?

— bitte wenden —

Aufgabe T1 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

c) $a_n = 2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1}$ ist durch 42 teilbar.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$.

Aufgabe T2 Zeigen Sie ohne vollständige Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1},$$

gilt und folgern Sie daraus die für $n \geqslant 2$ gültige Ungleichungskette

$$2\sqrt{n} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

Ist $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$ eine natürliche Zahl?

Aufgabe T3 Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt

a) $|2x| > |5 - 2x|$,

b) $3x(1 + |x|)^{-1} < 4x^2$,

c) $|2 - |2 - x|| \leqslant 1$,

d) $|x - 2||x + 2| = 2$.

Aufgabe T4 Die Zahlen a_n seien rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \qquad a_2 := \frac{1}{4}, \qquad a_n := \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{n^2} \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \quad \text{für } n \geqslant 3.$$

Versuchen Sie eine einfache Formel für a_n zu finden und beweisen Sie diese.

Übungsklausuren. Die Übungsklausuren zur Höheren Mathematik I finden am **Samstag**, den **04.12.2004**, und am **Samstag**, den **05.02.2005**, jeweils von **8.00 - 10.00 Uhr** statt.

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.