UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. oec. N. Breindl

WS 2004/2005
12.11.2004

4. Übungsblatt

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k.$$

Folgern Sie daraus den binomischen Satz.

Aufgabe 2 Leiten Sie für $\sum_{k=1}^{n} k^4$ $(n \in \mathbb{N})$ eine nur von n abhängige Summenformel her (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3 a) und c) vom 3. Übungsblatt). Beweisen Sie die Formel.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

a) $z = (1+i)^{10}$, **b)** $z = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$, **c)** $z = \left(\frac{2i}{1-i}\right)^9$.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie zu folgenden Gleichungen alle Lösungen in $\mathbb{C}$:

a) $z^5 = 1 - i$, **b)** $z^2 - 2z + 3 = 0$, **c)** $z^3 + 8$,

d) $\overline{z} = z^3$, **e)** $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$, **f)** $z^3 = \frac{6i-10}{4+i}$.

Aufgabe 5 Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = \frac{3}{2}i + \frac{2-i}{(1+i)^2}$ und $z_2 = \sqrt{2}(1+i)$.

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z_1 sowie die Polardarstellung von z_1 und z_2.

b) Berechnen Sie z_2^8.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen w der Gleichung $(w - z_2)^4 = -16$ in Polardarstellung und kartesischen Koordinaten.

Aufgabe T1 In einer Klausur haben n Studierende insgesamt k Punkte erreicht (wobei $n, k \in \mathbb{N}$; es gibt keine halben Punkte). Zeigen Sie, dass es dann

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Möglichkeiten gibt, wie die Punkte auf die Studierenden verteilt sein können.

— bitte wenden —

Aufgabe T2 Berechnen Sie für $z = -2 + 2i$ und $w = -3 - i\sqrt{3}$ Argument und Betrag sowie die Terme $zw, z\overline{w}, \overline{z}w, \frac{z}{w}, \frac{z^2}{w^2}$ und $\frac{w^3}{z^3}$.

Aufgabe T3 Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant |z - i| \text{ und } |z - i - 1| \leqslant 1\}$,

b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3 \text{ und } \frac{2}{3}\pi < \arg z < \frac{4}{3}\pi\}$,

c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1 + i| = |z - 2 - i|\}$,

d) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) \leqslant 1\}$,

e) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{7}{4}\pi\}$.

Aufgabe T4 Es sei $A := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{es gibt } t \in \mathbb{R} \text{ mit } z = i + t(1 + i)\}$. Die Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$f(z) := \frac{(2i + 1)z + 1}{z - 1}.$$

Skizzieren Sie die Menge A und die Menge $R(f)$.

Übungsklausur. Die 1. Übungsklausur zu HM I findet am **04. Dezember 2004** (Samstag), **8.00 – 10.00 Uhr** statt. Wer daran teilnehmen will, muss sich in der Zeit vom **22.11. – 25.11** in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen.

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.