

Lösung zum 4. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Wir erbringen den Beweis mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ steht links $(1 + t)$ und rechts

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} t^k = \binom{1}{0} t^0 + \binom{1}{1} t^1 = 1 + t,$$

denn $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ und $t^0 = 1$ (auch $0^0 = 1$). Für $n = 1$ ist die Formel also richtig.

Induktionsschritt: Nun sei die Gleichung für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ bewiesen (Induktionsvoraussetzung, IV). Dann folgt

$$\begin{aligned} (1 + t)^{n+1} &= (1 + t)(1 + t)^n \stackrel{\text{IV}}{=} (1 + t) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} t^j = \binom{n}{0} t^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} t^j + \binom{n}{n} t^{n+1} \\ &= t^0 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] t^k + t^{n+1} \end{aligned}$$

und mit der aus der Vorlesung bekannten Gleichung $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ erhalten wir

$$= \binom{n+1}{0} t^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} t^k + \binom{n+1}{n+1} t^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} t^k,$$

womit die Induktionsbehauptung bewiesen ist.

Daraus können wir nun den binomischen Satz folgern: Für $x \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= (x(1 + y/x))^n = x^n (1 + y/x)^n = x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (y/x)^k \\ &= x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \end{aligned}$$

Ist dagegen $x = 0$, so gilt

$$(x + y)^n = y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

weil in dieser Summe alle Summanden außer dem letzten 0 ergeben.

Aufgabe 2 Wir berechnen zunächst die Summe $\sum_{k=1}^n ((k+1)^5 - k^5)$ auf zwei verschiedene Arten. Berechnen wir die Summe als Teleskopsumme, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^5 - k^5) = \sum_{j=2}^{n+1} j^5 - \sum_{j=1}^n j^5 = (n+1)^5 - 1.$$

Da

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^5 - k^5] = \sum_{k=1}^n (1 + 5k + 10k^2 + 10k^3 + 5k^4).$$

können wir hier die bereits bekannten Summenformeln einsetzen und mit obiger Summe gleichsetzen. Wir erhalten dadurch

$$n + 5 \frac{n(n+1)}{2} + 10 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 10 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + 5 \sum_{k=1}^n k^4 = (n+1)^5 - 1$$

$$\frac{5}{2}n^4 + \frac{25}{3}n^3 + 10n^2 + \frac{31}{6}n + 5 \sum_{k=1}^n k^4 = 5n + 10n^2 + 10n^3 + 5n^4 + n^5$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})[6n(n+1)-2]}{30}.$$

Der Beweis ist bereits erbracht, da wir lediglich Umformungen bereits bewiesener Tatsachen verwendet haben.

Die Beweisführung selbst, dass die Behauptung obiger Summenformel richtig, erfolgt mittels vollständiger Induktion und ist hier nochmals aufgeführt.

Induktionsanfang: $n = 1 : \sum_{k=1}^1 k^4 = 1 = \frac{(6+15+10-1)}{30},$

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})[6n(n+1)-2]}{30} \quad (\text{IV}),$$

Induktionsschluß: $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^4 &= \sum_{k=1}^n k^4 + (n+1)^4 \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})[6n(n+1)-2]}{30} + (n+1)^4 \\ &= \frac{(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n) + 30(1 + 3n + 3n^2 + n^3)}{30} \\ &= \frac{1}{30}(n+1)(6n^4 + 39n^3 + 91n^2 + 89n + 30) \\ &= \frac{1}{30}(n+1)(n+2)(6n^3 + 27n^2 + 37n^2 + 15) \\ &= \frac{1}{30}(n+1)(n+2)(n+\frac{3}{2})[6(n+1)(n+2)-2], \end{aligned}$$

da $(6n^3 + 27n^2 + 37n + 15)(n + \frac{3}{2}) = 6n^2 + 18n + 10 = 6(n+1)(n+2) - 2.$

Aufgabe 3 Wir bestimmen jeweils die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

a) Für $z = \underbrace{(1+i)}_w^{10}$ ist $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und für das Argument von w muss gelten:

$1+i = \sqrt{2}(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\varphi)$, also $\varphi = \frac{\pi}{4} = \arg(w)$. Es ist also $z = w^{10} = [\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))]^{10} = 2^5(\cos(\frac{5\pi}{2}) + i \sin(\frac{5\pi}{2})) = 32(\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})) = 32i$, also $\operatorname{Re} z = 0$ und $\operatorname{Im} z = 32$.

b) Da $z = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ist $|w| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$, d.h. für das Argument von w muss $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ gelten. Dies ist für $\varphi = \frac{5}{3}\pi$ erfüllt. Für z gilt somit $z = w^3 = \left(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i \sin(\frac{5}{3}\pi)\right)^3 = \cos(5\pi) + i \sin(5\pi) = -1$, also $\operatorname{Re} z = -1$ und $\operatorname{Im} z = 0$.

c) Da $z = \left(\frac{2i}{1-i}\right)^9 = \left(\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^9 = \left(\frac{2i-2}{2}\right)^9 = \underbrace{(i-1)}_w^9$ ist $|w| = \sqrt{2}$ und für das Argument von w muss gelten: $i-1 = \sqrt{2}(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \Leftrightarrow \cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, also $\varphi = \frac{3}{4}\pi = \arg(w)$.

Es ist also $z = w^9 = [\sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi))]^9 = 16\sqrt{2}(\cos(\frac{27}{4}\pi) + i \sin(\frac{27}{4}\pi))$

$= 16\sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi)) = -16 + 16i$, d.h. $\operatorname{Re} z = -16$ und $\operatorname{Im} z = 16$.

Aufgabe 4 Wir berechnen zunächst die Polarkoordinaten von $1-i$:

$|1-i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$, also $(1-i) = \sqrt{2}(\cos(\frac{7}{4}\pi) + i \sin(\frac{7}{4}\pi))$. Die 5-ten Wurzeln von $1-i$ sind dann die Zahlen z_k mit $|z_k| = \sqrt[5]{2}$ und

$$\arg(z_k) = \varphi_k = \frac{7}{20}\pi + \frac{2k\pi}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

also $\varphi_0 = \frac{7}{20}\pi, \varphi_1 = \frac{15}{20}\pi, \varphi_2 = \frac{23}{20}\pi, \varphi_3 = \frac{31}{20}\pi, \varphi_4 = \frac{39}{20}\pi$. Als Lösungen erhalten wir somit

$$z_k = \sqrt[5]{2}(\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k)) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

b) Es ist $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = -2 \Leftrightarrow z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$.

c) Es ist $z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4) = (z+2)((z-1)^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow z_0 = -2 \vee z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$.

d) Für jede Lösung muss $|\bar{z}| = |z^3|$, also $|z| = |z|^3$ gelten. Folglich ist $|z| = 0$ oder $|z| = 1$. Offenbar ist 0 eine Lösung; es bleibt noch der Fall $|z| = 1$. Ein solches z können wir darstellen als $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (mit $\varphi \in [0, 2\pi)$) und die Gleichung geht über in

$$\cos \varphi - i \sin \varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3.$$

Wegen $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi)$ (siehe Vorlesung) sowie $-\sin \varphi = \sin(-\varphi)$ und $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$ bedeutet dies

$$\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi).$$

Dies gilt genau dann, wenn $-\varphi = 3\varphi + 2k\pi$ mit einem gewissen $k \in \mathbb{Z}$, also: $\varphi = -\frac{1}{2}k\pi$. Wegen $\varphi \in [0, 2\pi)$ haben wir vier Lösungen: $\varphi \in \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$. Diese Argumente liefern die komplexen Zahlen $1, i, -1$ und $-i$.

Insgesamt: Die Lösungsmenge der Gleichung ist somit $\{0, 1, i, -1, -i\}$.

e) Wir setzen $w = z^2$ und erhalten

$$w^2 - 2w + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i.$$

Es ist also $z^2 = 1 \pm \sqrt{3}i$. Mit $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ ergibt sich

$$\begin{aligned} z^2 = 1 + \sqrt{3}i &\Leftrightarrow r^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) = 2(\cos(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) + i \sin(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)) \\ &\Leftrightarrow r^2 = 2 \quad \wedge \quad 2\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \quad \wedge \quad \varphi_k = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

also $z_0 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6})) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ (für $k = 0$) und $z_1 = \sqrt{2}(\cos(\frac{7}{6}\pi) + i \sin(\frac{7}{6}\pi)) = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ (für $k = 1$). Die beiden anderen Lösungen erhalten wir auf gleiche Weise.

$$\begin{aligned} z^2 = 1 - \sqrt{3}i &\Leftrightarrow r^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) = 2(\cos(\frac{5}{3}\pi + 2k\pi) + i \sin(\frac{5}{3}\pi + 2k\pi)) \\ &\Leftrightarrow r^2 = 2 \quad \wedge \quad 2\varphi = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \quad \wedge \quad \varphi_k = \frac{5}{6}\pi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

also $z_2 = \sqrt{2}(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i \sin(\frac{5}{6}\pi)) = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ (für $k = 0$) und $z_3 = \sqrt{2}(\cos(\frac{11}{6}\pi) + i \sin(\frac{11}{6}\pi)) = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ (für $k = 1$).

f) Zunächst formen wir die rechte Seite um:

$$\frac{6i - 10}{4 + i} \cdot \frac{4 - i}{4 - i} = \frac{(6i - 10)(4 - i)}{16 - i^2} = \frac{24i - 6i^2 - 40 + 10i}{17} = \frac{-34 + 34i}{17} = -2 + 2i$$

Wir erhalten drei Lösungen

$$z_k = \sqrt[3]{|-2 + 2i|} (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad \text{mit} \quad \varphi_k = \frac{\arg(-2 + 2i)}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Die Lösungen haben also wegen $|-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ den Betrag $\sqrt[3]{8} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2}$ und wegen $\arg(-2 + 2i) = \frac{3}{4}\pi$ die Argumente

$$\varphi_k = \frac{1}{4}\pi + \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2,$$

also $\varphi_0 = \frac{1}{4}\pi$, $\varphi_1 = \frac{11}{12}\pi$, $\varphi_2 = \frac{19}{12}\pi$. Als Lösungen ergeben sich somit

$$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = \sqrt{2}(\cos(\frac{11}{12}\pi) + i \sin(\frac{11}{12}\pi)), \quad z_2 = \sqrt{2}(\cos(\frac{19}{12}\pi) + i \sin(\frac{19}{12}\pi)).$$

Aufgabe 5 a) $z_1 = \frac{3}{2}i + \frac{2-i}{(1+i)^2} = \frac{3i^2}{2i} + \frac{2-i}{2i} = \frac{-3+2-i}{2i} = \frac{-i-i^2}{2i^2} = \frac{1-i}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$

Polardarstellung von z_1 : $|z_1| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Für das Argument von z_1 muss gelten:

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \Leftrightarrow \cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ und } \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ also } \varphi = \frac{3}{4}\pi = \arg(z_1)$$

$$(\arg z_1 = \pi + \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \pi + \arctan(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi) \Rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi)).$$

Polardarstellung von z_2 : $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$. Für das Argument von z_2 muss gelten:

$$\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)), \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ und } \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ also } \varphi = \frac{\pi}{4} = \arg(z_2)$$

$$(\arg(z_2) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}) \Rightarrow z_2 = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})).$$

b) $z_2^8 = 2^8(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = 2^8.$

c) $(w - \sqrt{2} - \sqrt{2}i)^4 = -16$. Wir setzen $z := w - \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$$z^4 = -16 = 16(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) \Rightarrow z_k = \sqrt[4]{16}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})) \\ = 2(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})) \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

$$z_0 = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i + \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}(1 + i) = 4(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$$

$$(|w_0| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4, \arg(w_0) = \frac{\pi}{4}),$$

$$z_1 = 2(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi)) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow w_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}i\sin(\frac{\pi}{2}),$$

$$z_2 = 2(\cos(\frac{5}{4}\pi) + i\sin(\frac{5}{4}\pi)) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow w_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0,$$

$$z_3 = 2(\cos(\frac{7}{4}\pi) + i\sin(\frac{7}{4}\pi)) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow w_3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}.$$

Aufgabe T1 (Da uns keine Maximalpunktzahl, die pro Klausur erreicht werden konnte, bekannt ist, beachten wir eine solche auch nicht.) Man kann die Formel mit vollständiger Induktion beweisen; wir wollen hier aber einen anderen Weg gehen. Dazu betrachten wir die k zu verteilenden Punkte:

• • • • •

Eine bestimmte Verteilung können wir dann veranschaulichen, indem wir $n - 1$ senkrechte Striche zwischen den k Punkten verteilen, also z. B. so:

• • • || • | ... | • •

Hier hat der erste Studierende drei Punkte, der zweite keinen, der dritte einen, ...; der letzte schließlich hat zwei. Um eine Verteilung darzustellen, müssen wir also stets $n - 1 + k$ Symbole hintereinanderschreiben, nämlich genau k Punkte und $n - 1$ Striche. Dabei wählen wir aus, an welchen Positionen Punkte stehen sollen. Folglich gibt es so viele verschiedene Verteilungen wie es k -elementige Teilmengen einer $(n - 1 + k)$ -elementigen Menge gibt; laut Vorlesung sind dies aber genau

$$\binom{n + k - 1}{k}.$$

Aufgabe T2 Wir bestimmen uns zunächst die Polardarstellung von z und w . Also eine Darstellung der Form

$$z = x + iy = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

wobei $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arg(z)$.

Für $z = -2 + 2i$ ist $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ und für das Argument von z muss gelten

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \Leftrightarrow \cos(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } \sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi,$$

also $z = -2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi))$.

Für $w = -3 - i\sqrt{3}$ ist $|w| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$ und für $\arg(w) = \varphi$ muss gelten

$$-3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \Leftrightarrow \cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } \sin(\varphi) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{7}{6}\pi,$$

also $w = -3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}(\cos(\frac{7}{6}\pi) + i \sin(\frac{7}{6}\pi))$.

i) $zw = (-2 + 2i)(-3 - i\sqrt{3}) = 6 + 2\sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - 6)$, bzw. in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} zw &= 2\sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi)) \cdot 2\sqrt{3}(\cos(\frac{7}{6}\pi) + i \sin(\frac{7}{6}\pi)) \\ &= 4\sqrt{6}(\cos(\frac{3}{4}\pi + \frac{7}{6}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi + \frac{7}{6}\pi)) = 4\sqrt{6}(\cos(\frac{23}{12}\pi) + i \sin(\frac{23}{12}\pi)), \end{aligned}$$

ii) $z\bar{w} = (-2 + 2i)(-3 + i\sqrt{3}) = 6 - 2\sqrt{3} - i(2\sqrt{3} + 6)$, bzw. in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} z\bar{w} &= 2\sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi)) \cdot 2\sqrt{3}(\cos(\frac{7}{6}\pi) - i \sin(\frac{7}{6}\pi)) \\ &= 4\sqrt{6}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi)(\cos(-\frac{7}{6}\pi) + i \sin(-\frac{7}{6}\pi)) \\ &= 4\sqrt{6}(\cos(-\frac{5}{12}\pi) + i \sin(-\frac{5}{12}\pi)) = 4\sqrt{6}(\cos(\frac{19}{12}\pi) + i \sin(\frac{19}{12}\pi)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \bar{z}w &= \overline{z\bar{w}} = 6 - 2\sqrt{3} + i(2\sqrt{3} + 6), \text{ bzw. } 4\sqrt{6}(\cos(-\frac{5}{12}\pi) - i \sin(-\frac{5}{12}\pi)) \\ &= 4\sqrt{6}(\cos(\frac{5}{12}\pi) + i \sin(\frac{5}{12}\pi)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \frac{z}{w} &= \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{6 - 2\sqrt{3} - i(2\sqrt{3} + 6)}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} - i(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}), \text{ bzw. } \\ &\frac{1}{12} \cdot 4\sqrt{6}(\cos(\frac{19}{12}\pi) + i \sin(\frac{19}{12}\pi)) = \frac{\sqrt{2}}{3}(\cos(\frac{19}{12}\pi) + i \sin(\frac{19}{12}\pi)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{v) } \frac{z^2}{w^2} &= \left(\frac{z}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}(\cos(\frac{19}{12}\pi) + i \sin(\frac{19}{12}\pi))\right)^2 = \frac{2}{3}(\cos(\frac{19}{6}\pi) + i \sin(\frac{19}{6}\pi)) \\ &= \frac{2}{3}(\cos(\frac{7}{6}\pi) + i \sin(\frac{7}{6}\pi)) = \frac{2}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}i \end{aligned}$$

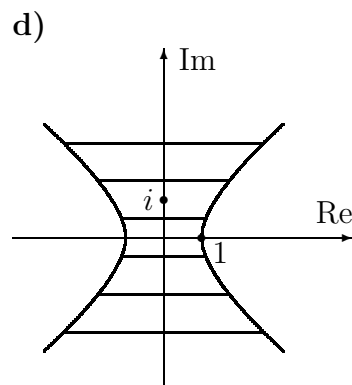
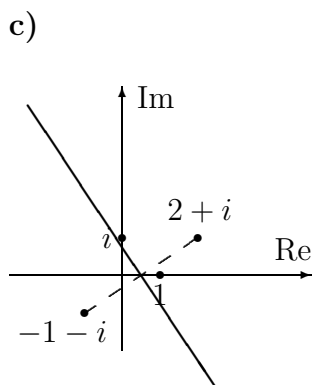
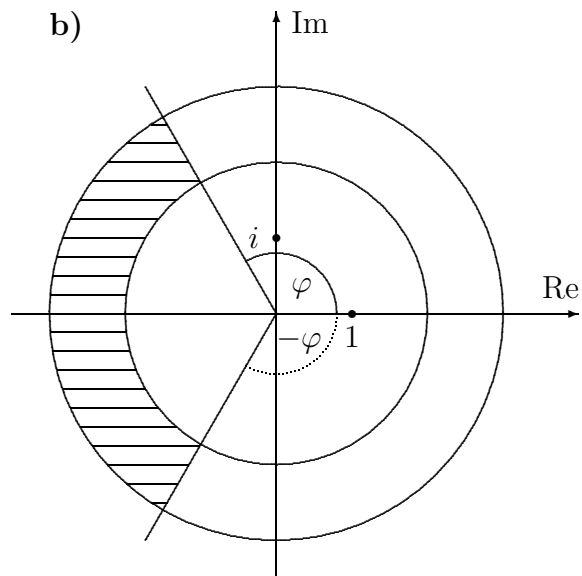
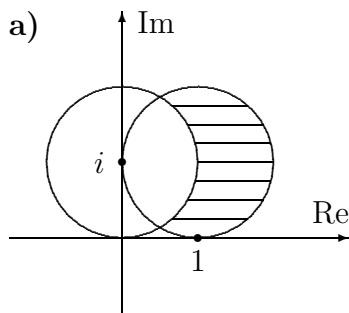
$$\text{vi) } \frac{w^3}{z^3} = \frac{1}{z} \frac{w}{w^2} = \frac{1}{-2+2i} \frac{2\sqrt{3}(\cos(\frac{7}{6}\pi) + i \sin(\frac{7}{6}\pi))}{\frac{2}{3}(\cos(\frac{7}{6}\pi) + i \sin(\frac{7}{6}\pi))} = 3\sqrt{3} \frac{1}{-2+2i} = 3\sqrt{3} \frac{(-2-2i)}{8} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i.$$

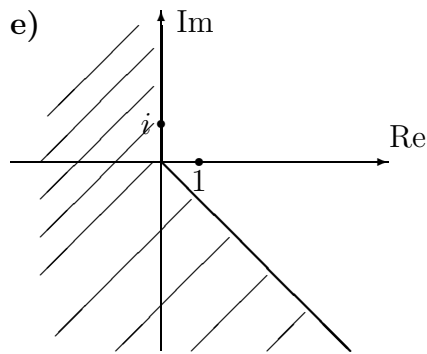
Aufgabe T3

- a) Durch $1 \leq |z - i|$ wird das Äußere einer Kreisscheibe mit Radius 1 um den Punkt i in der komplexen Zahlenebene beschrieben; durch $|z - i - 1| \leq 1$ eine Kreisscheibe mit Radius 1 um $i + 1$ (die Kreislinie gehört jeweils dazu). Die Menge A ist daher der in der Skizze schraffierte Bereich; der Rand gehört dazu.
- b) Durch $2 < |z| < 3$ wird ein Kreisring um den Punkt 0 mit innerem Radius 2 und äußerem Radius 3 beschrieben. Durch die Bedingung für $\arg(z)$ wird daraus ein Sektor ausgeschnitten (siehe Skizze; $\varphi = \frac{2}{3}\pi$); der Rand gehört diesmal nicht dazu.
- c) Die Menge C ist die Menge aller Punkte in $\mathbb{C}$, die vom Punkt $-1 - i$ denselben Abstand haben wie vom Punkt $2 + i$. Dies ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke der beiden Punkte.
- d) Es ist

$$\begin{aligned} z = x + iy \in D &\Leftrightarrow 1 \geq \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}((x + iy)^2) = \operatorname{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = x^2 - y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 \leq 1 + y^2 \Leftrightarrow -\sqrt{1 + y^2} \leq x \leq \sqrt{1 + y^2}. \end{aligned}$$

- e) Es handelt sich bei der Menge E um ein Segment.





Aufgabe T4 Offenbar ist A eine Gerade. Bezeichnet man den Realteil von z mit x und den Imaginärteil mit y , so ist die Gerade durch $y = x + 1$ gegeben.

Rechnen wir einige Bildpunkte aus: $f(-1) = i$, $f(i) = 1$ und $f(1 + 2i) = 2 + i$. Probiert man weitere Punkte aus, so stellt man fest, dass die Bildpunkte stets auf einem Kreis mit Radius 1 um $1 + i$ liegen. Wir bestätigen dies: Für $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{(2i+1)z+1}{z-1} - (1+i) \right| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{(2i+1)z+1}{z-1} - \frac{(1+i)(z-1)}{z-1} \right| = 1 \\ \Leftrightarrow \left| \frac{iz+2+i}{z-1} \right| = 1 &\Leftrightarrow \frac{|iz+2+i|}{|z-1|} = 1 \Leftrightarrow |iz+2+i|^2 = |z-1|^2 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (2-y)^2 = (x-1)^2 + y^2 &\Leftrightarrow 2x+1-4y+4 = -2x+1 \\ \Leftrightarrow y = x+1 &\Leftrightarrow z \in A \end{aligned}$$

Damit wissen wir: Die Bildpunkte liegen alle auf der Kreislinie; aber: Kommen auch wirklich alle Punkte der Kreislinie als Bildpunkte vor? Dazu betrachten wir folgendes:

$$\begin{aligned} g(z) := \frac{(2i+1)z+1}{z-1} = w &\Leftrightarrow (2i+1)z+1 = wz-w \\ &\Leftrightarrow (2i+1-w)z = -w-1 \Leftrightarrow z = \frac{w+1}{w-(1+2i)} \end{aligned}$$

Wir sehen: $w = 1 + 2i$ kann nicht vorkommen, für alle anderen w auf der Kreislinie findet man dagegen ein z mit $g(z) = w$. Dieses z muss aus A sein, denn oben hatten wir uns überlegt, dass dies aus $|g(z) - (1+i)| = 1$ folgt.

