UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. oec. N. Breindl

WS 2004/2005
26.11.2004

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{x} \times \vec{z}$ und das Spatprodukt $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bilden die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ ein Rechtssystem? Sind sie linear unabhängig?

Aufgabe 2 Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Punkte A, B, C mit den zugehörigen Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sowie} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die Fläche und den Winkel bei A im Dreieck ΔABC?

c) Wie groß ist das Volumen des Spats, der von $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ und $\vec{u}$ aufgespannt wird?

Aufgabe 3 Im $\mathbb{R}^3$ seien die folgenden Punkte $A = (5, 0, 1)$, $B = (4, -2, 1)$, $C = (2, -4, 2)$, $P = (5, -5, 3)$, $Q = (3, 1, 1)$ und $R = (9, 3, 1)$ gegeben.

a) Welchen Abstand hat P von der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C geht?

b) Es sei $K := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - \vec{p}\| = 5 \}$ die Kugel um P mit Radius 5. Der Schnitt von E und K ist ein Kreis; berechnen Sie dessen Mittelpunkt und Radius.

c) Welche Koordinaten hat der Punkt, der sich ergibt, wenn man den Punkt P an der Ebene E spiegelt?

d) Es sei g die Gerade, die durch A und B geht, h sei die Gerade, die durch Q und R geht. Zeigen Sie, dass sich g und h in einem Punkt schneiden und bestimmen Sie diesen sowie den Schnittwinkel.

Aufgabe 4 Sei $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$. Zeigen Sie, dass durch

$$\|\vec{a}\|_\infty := \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\} \quad \text{und} \quad \|\vec{a}\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|,$$

Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ gegeben sind.

Aufgabe 5 Gegeben seien die Folgen (a_n) und (b_n) durch

$$a_n = \frac{2n}{n+1} \quad \text{und} \quad b_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}.$$

a) Berechnen Sie jeweils die ersten vier Folgenglieder und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

b) Geben Sie zu jeder Folge einen Index n_0 an, so dass a_n und b_n für alle $n \geqslant n_0$ vom jeweiligen Grenzwert höchstens den Abstand $\frac{1}{1000}$ haben.

— bitte wenden —

Aufgabe T1 Gegeben seien drei Ebenen im $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 : -y + z - 2 = 0, \quad E_2 : 3x + y + 2z - 1 = 0, \quad E_3 : z - 3 = 0.$$

a) Bestimmen Sie $S = E_1 \cap E_2 \cap E_3$. Welchen Abstand hat S von der Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,?$$

b) Wie lautet die Ebene E in Hesse-Normalform?

Aufgabe T2 Durch die Ortsvektoren

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 34 \\ 14 \end{pmatrix},$$

sind die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 im $\mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass diese vier Punkte nicht in einer Ebene liegen.

b) Es existiert somit genau eine Ebene E, so dass P_1 und P_3 auf der einen, P_2 und P_4 auf der anderen Seite von E liegen, aber alle denselben Abstand d von E besitzen. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E und den Abstand d.

c) Es sei g die Gerade durch P_2 und P_3. Berechnen Sie deren Schnitt mit der durch

$$F : 2x - y + 3z = 0,$$

gegebenen Ebene sowie die senkrechte Projektion h von g auf F.

Aufgabe T3 Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ feste Vektoren.

a) Zeigen Sie: Es ist $\vec{a} = \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ genau dann, wenn $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b} \times \vec{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt.

b) Zeigen Sie: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann Ortsvektoren dreier auf einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ liegenden Punkte A, B und C, wenn gilt $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $\vec{x} + \vec{a} \times x = \vec{b}$.

Aufgabe T4 Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der nachstehenden Folgen (a_n) und geben Sie $\liminf(a_n)$ und $\limsup(a_n)$ an.

a) $a_n = \big(1 + (-1)^n\big)^n$,

b) $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \\ 2, & n = 3k - 1 \\ 2 + (n+1)/n, & n = 3k - 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}).$

Aufgabe T5 Es sei $0 < a < 1$. Die Folge a_n wird rekursiv definiert durch

$$a_1 := \tfrac{1}{2}a, \qquad a_{n+1} := \tfrac{1}{2}(a + a_n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend und nach oben durch 1 beschränkt. Konvergiert die Folge? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Übungsklausur. Die 1. Übungsklausur zur Vorlesung HM I findet am **Samstag**, dem **4. Dezember** von **8.00** bis **10.00 Uhr** statt. Wer daran teilnehmen will, muss sich bis zum **25.11. (13 Uhr)** in die vor dem Sekretariat ausliegenden Listen eintragen.

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.

— bitte wenden —