UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. oec. N. Breindl

WS 2004/2005
03.12.2004

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die gegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3}$

b) $a_n = (-1)^n + 1/n$

c) $a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$

d) $a_n = \dfrac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$

e) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

f) $a_n = n^4 \left(\sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}} - 1 \right)$

Aufgabe 2 Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_1 := \sqrt{2}, \quad a_2 := \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad a_3 := \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \ldots$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sqrt[n]{n!}$ streng monoton wachsend ist und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$.

Aufgabe 4 Zeigen Sie: Die durch $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ gegebenen Folgen (a_n) und (b_n) definieren eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$ für die Zahl e.

Aufgabe 5 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+n^2} - n\right)$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Aufgabe T1 Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n}.$$

Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

— bitte wenden —

Aufgabe T2 Bestimmen Sie sämtliche Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ sowie jeweils eine dagegen konvergierende Teilfolge. Geben Sie, sofern diese existieren, auch $\liminf(a_n)$, $\limsup(a_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ an.

a) $a_n = \dfrac{3n^2 + \sqrt{n^3+2}}{n^2 - n + 1}$, **b)** $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$, **c)** $a_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n}$,

d) $a_n = 2^{1-n}(\sqrt{3}+i)^n$ **e)** $a_n = \left(\dfrac{n-2}{n+3}\right)^{2n+3}$ **f)** $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n + i2^{-n}n$

Aufgabe T3 Welche der folgenden Reihen konvergieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}\left(1+(-1)^n\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\frac{1}{n}}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}$

Aufgabe T4 Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)3^k}$$

Ihren Wert bezeichnen wir mit s, die n-te Partialsumme mit s_n. Geben Sie ein N an, so dass $|s_N - s| < \frac{1}{2}10^{-6}$ gilt.

Aufgabe 5 Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei monoton fallend und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere. Zeigen Sie, dass dann

$$n \cdot a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

gilt. Folgt dies auch, wenn wir statt der Monotonie nur $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen?

Hinweise zur 1. Übungsklausur:

- Termin: 04. Dezember (Samstag) von 8.00 Uhr bis 10.00 Uhr
- Bringen Sie Studienausweis und Schreibgerät mit; Papier wird gestellt.
- Zulässige Hilfsmittel: alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z. B. Mitschriften, Übungsblätter, alte Klausuren).
- **Nicht zugelassen** sind dagegen einzelne Blätter und elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner).
- Die korrigierten Übungsklausuren können ab 14.12. (Dienstag) im Sekretariat abgeholt werden.
- Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am 16.12. (Donnerstag) von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.