UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. oec. N. Breindl

WS 2004/2005
03.12.2004

Lösung zum 7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3} = \frac{1/n+3/n^2-4/n^3}{1/n^3+1/n+4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

b) Diese Folge ist divergent, denn sie besitzt die zwei Häufungspunkte 1 und -1.

c) Wegen $(u-v)(u+v) = u^2-v^2$, also $u-v = (u^2-v^2)/(u+v)$, ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{9n^2+2n+1}-3n &= \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2+1/n}{\sqrt{9+2/n+1/n^2}+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

d) Der binomische Satz liefert

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}n^k = \alpha_0+\alpha_1 n+\cdots+\alpha_{42}n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k = \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42}-n^{42} = \alpha_0+\alpha_1 n+\cdots+\alpha_{41}n^{41}$. Folglich:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0+\alpha_1 n+\cdots+\alpha_{40}n^{40}+\alpha_{41}n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}}+\frac{\alpha_1}{n^{40}}+\cdots+\frac{\alpha_{40}}{n}+\alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

e) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}$

$$= \frac{\prod_{k=2}^{n} k-1}{\prod_{k=2}^{n} k}\cdot\frac{\prod_{k=2}^{n} k+1}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=2}^{n} k}\cdot\frac{\prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

f) Wir gehen ähnlich wie in Teil **c)** vor. Wir verwenden

$$u^m - v^m = (u-v)(u^{m-1} + u^{m-2}v + \cdots + uv^{m-2} + v^{m-1}),$$

für $m = 10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}}$, dann ist $u = b_n$ und $v = 1$ und wir erhalten

$$a_n = n^4(b_n - 1) = n^4 \cdot \frac{b_n^{10} - 1^{10}}{b_n^9 + b_n^8 + \cdots + 1} = \frac{n^4(3n^{-4} + n^{-9})}{b_n^9 + b_n^8 + \cdots + 1} = \frac{3 + n^{-5}}{b_n^9 + b_n^8 + \cdots + 1}$$

und wegen $b_n \to 1$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 2 Die Folge ist durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

gegeben. (Offenbar sind alle $a_n \geqslant 0$; also kann man die Wurzel ziehen.)
Die Folge ist monoton wachsend, wie wir nun mit vollständiger Induktion zeigen:
Induktionsanfang: Es gilt $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geqslant \sqrt{2} = a_1$.
Induktionsschluß: Es sei bereits $a_n \geqslant a_{n-1}$ für ein gewisses $n \geqslant 2$ bewiesen. Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \geqslant \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n.$$

Als nächstes zeigen wir, dass die Folge nach oben durch 2 beschränkt ist:
Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = \sqrt{2} \leqslant 2$.
Induktionsschluß: Ist $a_n \leqslant 2$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, so folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leqslant \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Da (a_n) monoton wächst und nach oben beschränkt ist, konvergiert die Folge gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Alle a_n sind $\geqslant 0$, also gilt dies auch für a. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsformel ergibt sich für a die Gleichung $a = \sqrt{2 + a}$. Quadrieren liefert $a^2 = 2 + a$, also $a^2 - a - 2 = 0$. Diese Gleichung hat die zwei Lösungen

$$a_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}.$$

Wegen $a \geqslant 0$ folgt $a = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$.

Aufgabe 3 **a)** Wir haben die folgende Äquivalenzenkette:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} \;&\Leftrightarrow\; (n!)^{1/n} < \big((n+1)!\big)^{1/(n+1)} \;\Leftrightarrow\; (n!)^{(n+1)/n} < (n+1)! \\ &\Leftrightarrow\; n! \cdot (n!)^{1/n} < (n+1)! \;\Leftrightarrow\; (n!)^{1/n} < n+1 \\ &\Leftrightarrow\; n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n \text{ Faktoren}} < (n+1)^n. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist immer richtig. Obige Ungleichung kann auch mittels der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel gezeigt werden:

$$(n!)^{1/n} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \leqslant \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n} = \tfrac{1}{2}(n+1) < n+1.$$

b) Für $b_n := n!/n^n$ gilt

$$\frac{a_n}{n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{b_n}.$$

Um den gesuchten Grenzwert zu berechnen betrachten wir

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}.$$

Da aus $a_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ ist auch $\sqrt[n]{b_n} \to e^{-1}$ für $n \to \infty$, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1/e.$$

Aufgabe 4 Wir wissen schon, dass $a_n \to e$ für $n \to \infty$ gilt; wir müssen also nur noch zeigen, dass $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung ist. Dies bedeutet: (a_n) wächst monoton, (b_n) fällt monoton, es gilt $a_n \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

(a_n) wächst monoton: Zu zeigen ist $a_n \leqslant a_{n+1}$, also

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\leftrightarrow \quad \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \leqslant \frac{n+2}{n+1} \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \geqslant \frac{n+1}{n+2}.$$

Die letzte Ungleichung gilt: Die Bernoullische Ungleichung liefert nämlich

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{n}{(n+1)^2},$$

und wegen $(n+1)^2 = n^2+2n+1 \geqslant n^2+2n = n(n+2)$ folgt

$$\geqslant 1-\frac{n}{n(n+2)} = 1-\frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.$$

(b_n) fällt monoton: Wir formen die Aussage $b_n \geqslant b_{n+1}$ äquivalent um:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\leftrightarrow \quad \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geqslant \frac{n+2}{n+1} \quad \leftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geqslant \frac{n+2}{n+1}.$$

Um die letzte Ungleichung zu zeigen, verwenden wir wieder die Bernoullische Ungleichung und $(n+1)^2 \geqslant n(n+2)$:

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geqslant 1+\frac{n+1}{n(n+2)} \geqslant 1+\frac{n+1}{(n+1)^2} = 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Die Monotonieaussagen sind damit gezeigt. Weiter gilt

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{a_n}{n}.$$

Wegen $a_n \geqslant 0$ folgt hieraus $b_n - a_n \geqslant 0$, also $a_n \leqslant b_n$ und wegen $a_n \to e$ für $n \to \infty$ ergibt sich $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 5 **a)** Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

Folglich konvergiert die Reihe und hat den Wert 1.

b) Diese Reihe ist divergent. Es gilt nämlich

$$a_n := \frac{1}{2n+1} \geqslant \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n} =: c_n \geqslant 0,$$

und da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent ist, gilt dies auch für $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$; die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt mit dem Minorantenkriterium.

c) Nach dem binomischen Satz ist

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n}.$$

Wir haben also eine geometrische Reihe vor uns; sie ist konvergent und hat den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4.$$

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Daher gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2N+1}\right) \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2},$$

und damit konvergiert die Reihe mit Wert $\frac{1}{2}$.

e) Es gilt

$$\sqrt{1+n^2}-n = \frac{1+n^2-n^2}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{4n^2}+n} = \frac{1}{3n} =: c_n \geqslant 0,$$

und da die Reihe über c_n divergiert, gilt dies nach dem Minorantenkriterium auch für die zu untersuchende Reihe.

f) Aus der Vorlesung kennen wir die Darstellung $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).\end{aligned}$$

Für $N \in \mathbb{N}$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{N+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right) \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Die Reihe ist somit konvergent und hat den Wert $\frac{1}{4}$.
Bemerkung: Man könnte auch $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ verwenden.

Aufgabe T1 Da $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sind alle Folgenglieder $x_n \geqslant 1$.
Die Folge (x_n) ist monoton wachsend. Wir beweisen dies mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang $(n = 1)$: $x_2 = \sqrt{3x_1} = \sqrt{3} > 1 = x_1$,
Induktionsschritt: Sei $x_n > x_{n-1}$ für ein gewisses $n \geqslant 2$ bereits bewiesen. Dann folgt

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} > \sqrt{3x_{n-1}} = x_n.$$

Als nächstes beweisen wir, dass die Folge nach oben durch 10 beschränkt.
Induktionsanfang $(n = 1)$: $x_1 = 1 \leqslant 10$,
Induktionsschritt: Sei $x_n \leqslant 10$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, dann ist

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \leqslant \sqrt{30} < 10.$$

Da die Folge (x_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert sie gegen einen Grenzwert x. Für $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n := x$ gilt

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3x_{n-1}} = \sqrt{3x} \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = 3x \quad\Leftrightarrow\quad x = 3 \quad\vee\quad (x = 0).$$

Da $x \geqslant 1$ ist $x = 3$ der Grenzwert der Folge.

Aufgabe T2 **a)** $a_n = \dfrac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1} = \dfrac{3+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^4}}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{3}{1} = 3$, also: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

b) Da $3 = \sqrt[n]{3^n} \leqslant a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n} \leqslant \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\cdot\sqrt[n]{2}$, ist

$$3 = \lim_{n\to\infty} 3 \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} 3\cdot\sqrt[n]{2} = 3 \qquad (\text{da } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1),$$

und nach dem Sandwich-Theorem somit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

c) Für gerades $n = 2k$ ($k\in\mathbb{N}$) ist $a_n = a_{2k} = \left(1+\frac{1}{4k}\right)^{6k} = \left(\left(1+\frac{1}{4k}\right)^{4k}\right)^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{k\to\infty} e^{\frac{3}{2}}$, da $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$.

Für ungerades $n = 2k-1$ ($k\in\mathbb{N}$) ist $a_n = a_{2k-1} = \left(1-\frac{1}{4k-2}\right)^{6k-3} = \left(\frac{4k-3}{4k-2}\right)^{6k-3}$

$$= \left(\frac{1}{\frac{4k-2}{4k-3}}\right)^{6k-3} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4k-3}}\right)^{6k-3} = \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4k-3}\right)^{4k-3}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4k-3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$\xrightarrow{k\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 1^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}$. Es ist also $\limsup(a_n) = e^{\frac{3}{2}}, \liminf(a_n) = e^{-\frac{3}{2}}$. Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht.

d) $a_n = 2^{1-n}(\sqrt{3}+i)^n = 2^{1-n}(2(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6}))^n = 2(\cos(\frac{n\pi}{6})+i\sin(\frac{n\pi}{6}))$

$$= \begin{cases} \sqrt{3}+i & \text{für n} = 1,\ 13,\ 25,\ \ldots \\ 1+\sqrt{3}i & \text{für n} = 2,\ 14,\ 26,\ \ldots \\ \vdots & \qquad\vdots \\ \sqrt{3}-i & \text{für n} = 11,\ 23,\ 35,\ \ldots \\ 2 & \text{für n} = 12,\ 24,\ 36,\ \ldots\,. \end{cases}$$

Die Folge (a_n) besitzt 12 Häufungspunkte: $\pm 2, \pm 2i, \pm 1\pm\sqrt{3}i$ und $\pm\sqrt{3}\pm i$. Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht, $\limsup(a_n)$ und $\liminf(a_n)$ existieren ebenfalls nicht, bzw. sind nicht definiert, da $\mathbb{C}$ nicht angeordnet ist.

e) $a_n = \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+3} = \left(\frac{n+3-5}{n+3}\right)^{2n+3} = \left(1-\frac{5}{n+3}\right)^{2n+3} = \left(1+\frac{-5}{n+3}\right)^{2(n+3)}\left(1+\frac{-5}{n+3}\right)^{-3}$

$$= \left(\left(1+\frac{-5}{n+3}\right)^{(n+3)}\right)^2\left(1+\frac{-5}{n+3}\right)^{-3} \xrightarrow{n\to\infty} (e^{-5})^2\cdot 1^{-3} = e^{-10} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

f) $a_n = \sqrt{n^2+2n}-n+i2^{-n}n = b_n + ic_n$. Wir betrachten Real- und Imaginärteil getrennt:

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n^2+2n}-n = \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} \\ &= \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1. \end{aligned}$$

$c_n = 2^{-n}n = \dfrac{n}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da

$$2^n = (1+1)^n \overset{\text{Bin. S.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\geqslant}_{\text{für } n \geqslant 2} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \underbrace{\geqslant}_{\frac{n^2}{2} > n \text{ für } n \geqslant 2} \frac{n^2 - \frac{n^2}{2}}{2} = \frac{n^2}{4},$$

und somit

$$0 \leqslant \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{n}{\frac{n^2}{4}} = \frac{4}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Es ist also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n + ic_n) = 1$. ($\liminf(a_n)$ und $\limsup(a_n)$ sind nur für $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definiert).

Aufgabe T3 Mit a_n bezeichnen wir jeweils das Reihenglied.

a) Wegen $\sqrt[n]{|a_n|} = (\sqrt[n]{n}\,)^3 e^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} < 1$ ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergent.

b) Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} < 1.$$

Das Quotientenkriterium liefert daher: Die Reihe ist konvergent.

c) Wegen $|a_n| \leqslant 2n/3^n$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n}}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Die Konvergenz der Reihe folgt also aus dem Wurzelkriterium.

d) Wegen $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$ ist die Reihe konvergent (Wurzelkriterium).

e) Wir wissen, dass $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gilt. Die Folge $(\sqrt[n]{n}\,)$ ist also beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C, so dass $\sqrt[n]{n} \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \geqslant \frac{1}{Cn}$$

und die Divergenz unserer Reihe folgt aus dem Minorantenkriterium.

f) Hier greifen wir zum Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!(3n+3)!}{(n+1)!(4n+4)!} \cdot \frac{n!(4n)!}{(2n)!(3n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \\ &= \frac{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})(3+\frac{3}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})(4+\frac{4}{n})(4+\frac{3}{n})(4+\frac{2}{n})(4+\frac{1}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{1\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4} = \frac{27}{64} < 1.\end{aligned}$$

Die Reihe ist also konvergent.

Aufgabe T4 Mit a_k bezeichnen wir das Reihenglied. Zunächst zur Konvergenz:

$$|a_k| = \frac{1}{(2k+1)3^k} \leqslant \frac{1}{3^k} =: c_k.$$

Da $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert, folgt die Konvergenz unserer Reihe (Majorantenkriterium).

Nach Definition von s_N und s gilt

$$|s_N - s| = \left|\sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| = \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k\right| = \lim_{M\to\infty}\left|\sum_{k=N+1}^{M} a_k\right|$$

und für jedes $M \geqslant N+1$ gilt

$$\left|\sum_{k=N+1}^{M} a_k\right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{M} |a_k| \leqslant \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{3^k} \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^k}.$$

Folglich ist auch

$$|s_N - s| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{N+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{N+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\cdot 3^N}.$$

Wenn es uns also gelingt, ein N zu finden mit

$$\frac{1}{2\cdot 3^N} < \frac{1}{2}10^{-6},$$

so ist auch $|s_N - s| < \frac{1}{2}10^{-6}$. Wegen

$$\frac{1}{2\cdot 3^N} < \frac{1}{2}10^{-6} \quad \leftrightarrow \quad 3^N > 10^6 \quad \leftrightarrow \quad 3^{N/6} > 10$$

ist dies sicherlich für $N/6 = 3$, also $N = 18$ erfüllt.

Aufgabe T5 Die Reihe ist konvergent, also gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$; da die Folge (a_n) zudem monoton fällt, ist $a_n \geqslant 0$ für alle n.

Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Reihe konvergiert, gibt es ein N_0 mit

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N_0} a_n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt auch $N_0 \cdot a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Somit existiert ein N_1 mit $N_0 \cdot a_n \leqslant \varepsilon/2$ für $n \geqslant N_1$. Damit ergibt sich für $N \geqslant \max\{N_0, N_1\}$

$$N \cdot a_N = N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{N} a_N \leqslant N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{N} a_n \leqslant N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(Bei der ersten Abschätzung benutzen wir, dass (a_n) monoton fällt.)

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist damit $n \cdot a_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ bewiesen.

Die Voraussetzung $a_n \geqslant 0$ statt der Monotonie genügt nicht: Man betrachte das Beispiel

$$a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{falls } n \text{ eine Zweierpotenz ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Reihe ist konvergent, weil $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ konvergiert. Wenn n eine Zweierpotenz ist, gilt jedoch $n \cdot a_n = 1$; die Folge $(n \cdot a_n)$ konvergiert also nicht gegen 0.