UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. oec. N. Breindl

WS 2004/2005
10.12.2004

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Die Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien durch

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{und} \quad t_n := \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n.$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $e - \frac{1}{n \cdot n!} < s_n < e - \frac{1}{(n+1)!}$,

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $e - \frac{3}{n} < t_n < e - \frac{1}{2n}$.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die komplexe Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 3 Gegeben sei folgende rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Zeigen Sie, also dass zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, m, n \geqslant n_0$$

gilt. Berechnen Sie schließlich den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 4 Beweisen Sie: Zu jeder reellen Zahl x existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Aufgabe 5 Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{und} \qquad b_n := \frac{\big(1 + \frac{1}{2}(-1)^n\big)^n}{n^2}.$$

a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist. Warum ist das Kriterium von Leibniz hier nicht anwendbar?

c) Was können wir mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

— bitte wenden —

Aufgabe T1 Für welche $z \in \mathbb{C}$ liegt Konvergenz vor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$, **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

Aufgabe T2 Die Folgen (a_n) und (b_n) seien durch

$$0 < a_1 < b_1, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Untersuchen Sie beide Folgen auf Monotonie und Beschränktheit.

c) Zeigen Sie, dass die Folgen (a_n) und (b_n) denselben Grenzwert besitzen und berechnen Sie diesen (Hinweis: Betrachten Sie $a_{n+1}b_{n+1}$).

Aufgabe T3 Berechnen Sie für $q \in (0,1)$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)q^n.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Dies liefert eine Reihe, deren Wert Sie kennen. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Aufgabe T4 Es sei $q \in (0,1)$. Für die Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ gelte

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q \cdot |x_n - x_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Die Folge (x_n) konvergiert, und für ihren Grenzwert x gilt

$$|x - x_n| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Aufgabe T5 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \max\{n - n^2|x - \tfrac{1}{n}|, 0\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Skizzieren Sie die Schaubilder von f_1, f_2 und f_3 und berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0), \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\tfrac{1}{2}), \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\tfrac{1}{100}), \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\tfrac{1}{n})$$

Hinweise zur 1. Übungsklausur:

- Die korrigierten Übungsklausuren können ab 14.12. (Dienstag) im Sekretariat abgeholt werden.
- Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am 16.12. (Donnerstag) von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für diie Tutorien gedacht.