UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. H. Uecker

WS 2004/2005
07.01.2005

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ auf $I_1 = [0,1]$ bzw. auf $I_2 = [a,1]$ mit $a > 0$,

b) $f_n(x) = (1-x)^n$ auf $I_1 = [0,1]$ bzw. auf $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$,

c) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ auf $I = [0,1]$.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen in den jeweiligen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ auf $I = [0,1]$,

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ auf $I = \mathbb{R}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(1+x+x^2)}$ auf $I = \mathbb{R}$,

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}$ auf $I = \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z-2i)^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{4n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) z^n$.

Aufgabe 4 Sei $\delta > 0$ und $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $|x| < \delta$ konvergent. Dann ist f in $]-\delta, \delta[$ genau dann gerade (bzw. ungerade) wenn alle $a_{2k+1} = 0$ (bzw. alle $a_{2k} = 0$) sind.

Aufgabe T1 Welche Funktionen stellen folgende Potenzreihen dar?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} x^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{4n}}{(2n)!} x^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+1)^{2n+2}$.

— bitte wenden —

Aufgabe T2 Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) := x^2 + 2x - 3$. Berechnen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $1/f$ darstellt. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Aufgabe T3 Die Folge (a_n) der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch

$$a_0 := 1, \qquad a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Zeigen Sie: Für den Konvergenzradius r von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt $r \geqslant \frac{1}{2}$.

b) Die Potenzreihe stellt also auf $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ eine Funktion f dar. Zeigen Sie:

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1\,.$$

c) Folgern Sie: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1}{x - x_2} - \dfrac{1}{x - x_1} \right)$ mit gewissen Zahlen x_1 und x_2.

d) Gewinnen Sie daraus eine Potenzreihenentwicklung von f und leiten Sie dann eine (nicht rekursive) Formel für a_n ab.

Aufgabe T4 Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0. Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f(x) = (1 + x + x^2)^{-2}, \quad x_0 = 0$

b) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \frac{\pi}{4}$

c) $f(z) = \dfrac{1 - z}{1 - z - 2z^2}, \quad z_0 = 2$

d) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Frohe Weihnachten und alles Gute für das neue Jahr!

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sind für die Tutorien gedacht.