UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. H. Uecker

WS 2004/2005
07.01.2005

Lösung zum 10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** Es ist $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $x \neq 0$ ist $f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n}+nx^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Die Funktionenfolge konvergiert somit punktweise gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$. Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmässig, da für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} < \varepsilon,$$

für $n > \frac{1}{\varepsilon x}$ gilt, also keine für alle $x \in I_1$ gültige Abschätzung möglich ist.
Auf $I_2 = [a, 1]$ mit $a > 0$ ergibt sich wie zuvor punktweise gegen $f(x) = 0$. Die Funktionenfolge konvergiert jedoch nun gleichmässig, da für beliebiges $\varepsilon > 0$ und für alle $x \in I_2$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \leqslant \frac{1}{na} < \varepsilon,$$

für $n > \frac{1}{\varepsilon a}$ gilt.

b) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0, 1]$, so folgt $|1 - x| < 1$ und damit

$$f_n(x) = (1-x)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Auf $[0, 1]$ ist diese Funktion unstetig, im Gegensatz zu den Funktionen f_n; also kann die Konvergenz auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig sein.
Auf $[\frac{1}{2}, 1]$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor: Hier gilt $|1 - x| \leqslant \frac{1}{2}$, also

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |(1-x)^n| = |1-x|^n \leqslant 2^{-n}\,,$$

und wie bei **a)** bedeutet dies gleichmäßige Konvergenz.

Bemerkung: Auf dem Intervall $(0, 1]$ ist die Konvergenz jedoch *nicht* gleichmäßig, denn $\sup\{\,|f_n(x) - f(x)| : x \in (0,1]\,\} = 1$.

c) Offenbar gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0,1]$ ist $q := 1 - x \in [0,1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

(Dass $nq^n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, folgt daraus, dass wegen $\sqrt[n]{nq^n} \to q < 1$ für $n \to \infty$ die Reihe über nq^n konvergiert.) Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = 0$.

Obwohl diese Grenzfunktion stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Es gilt

$$f_n(\tfrac{1}{n+1}) = n \cdot \tfrac{1}{n+1}(1 - \tfrac{1}{n+1})^n = \tfrac{n}{n+1}(\tfrac{n}{n+1})^n = \tfrac{n}{n+1}(\tfrac{n+1}{n})^{-n} = \tfrac{n}{n+1}(1 + \tfrac{1}{n})^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}\,.$$

Dies bedeutet aber $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)| \geqslant \frac{1}{2}e^{-1}$ für alle hinreichend großen n und schließt die gleichmäßige Konvergenz aus.

Aufgabe 2 **a)** Für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$\left|\frac{nx^2}{n^3+x^3}\right| = \frac{nx^2}{n^3+x^3} \leqslant \frac{n}{n^3+x^3} \leqslant \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}\,.$$

Da die Reihe über $1/n^2$ konvergiert, können wir das Majorantenkriterium anwenden: Die Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) auf $[0,1]$.

b) Setzt man $x = 0$ ein, so hat die Reihe den Wert 0. Für $x \neq 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = x^2 \frac{1+x^2}{1+x^2-1} = 1 + x^2\,.$$

Die Funktionenreihe konvergiert somit punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + x^2, & x \neq 0. \end{cases}$$

Da diese Funktion an der Stelle $x = 0$ unstetig ist, die durch die Partialsummen der Reihe dargestellten Funktionen aber offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein. (Denn sonst würde sich die Stetigkeit übertragen.)

c) Wegen $1 + x + x^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ gilt $1 + x + x^2 \geqslant \frac{3}{4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$|e^{-n(1+x+x^2)}| = e^{-n(1+x+x^2)} \leqslant e^{-3n/4}\,.$$

Da die Reihe über $e^{-3n/4}$ konvergiert (geometrische Reihe), liefert das Majorantenkriterium wieder gleichmäßige und damit auch punktweise Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$.

d) Für $x = 0$ konvergiert die Reihe offensichtlich mit Wert 0; für $x \neq 0$ folgt die Konvergenz aus dem Leibnizkriterium. (Natürlich könnte man den Wert wieder konkret ausrechnen, da es sich um eine geometrische Reihe handelt.) Wir setzen

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k} \qquad \text{und} \qquad f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}\,,$$

und zeigen nun, dass sogar gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Das Leibnizkriterium liefert für $x \neq 0$ die Abschätzung

$$|f(x) - f_n(x)| = x^2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+x^2)^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(1+x^2)^k} \right| \leqslant x^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} .$$

Diese Abschätzung stimmt trivialerweise auch für $x = 0$.
Ist ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gilt für $|x| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant x^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leqslant \varepsilon \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leqslant \varepsilon ,$$

und für $|x| > \sqrt{\varepsilon}$ ergibt sich

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant x^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leqslant (1+x^2) \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leqslant \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} .$$

Wählen wir nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(1+\varepsilon)^{-n} \leqslant \varepsilon$ für $n \geqslant n_0$ gilt, so folgt

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } n \geqslant n_0 .$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe bewiesen.

Aufgabe 3 **a)** Die Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, da

$$\sqrt[k]{|2^k z^{k^2}|} = 2|z|^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k$. Die Reihe konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $a_n := (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^{4n}$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^4 \xrightarrow{n\to\infty} e \cdot x^4 .$$

Folglich konvergiert die Reihe für $e \cdot x^4 < 1$ (also $|x| < e^{-1/4}$) und divergiert für $e \cdot x^4 > 1$ (also $|x| > e^{-1/4}$); ihr Konvergenzradius ist daher $e^{-1/4}$. Untersuchen wir noch den Rand: Beide Randpunkte liefern die gleiche Reihe, nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n} .$$

Diese Reihe konvergiert nicht, denn die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0: Aus Aufgabe 1 des 8. Übungsblattes wissen wir $(1 + \frac{1}{n})^n \geqslant e - \frac{3}{n}$ und erhalten damit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n} = \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right)^n \geqslant \left(\frac{e - \frac{3}{n}}{e}\right)^n = \left(1 - \frac{3/e}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-3/e} .$$

Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $|x| < e^{-1/4}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leqslant a_n \leqslant n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe hat also den Konvergenzradius $1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

Aufgabe 4 Wird f in $]-\delta,\delta[$ durch eine Potenzreihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ dargestellt, so ist f sicherlich gerade. Sei umgekehrt f in $]-\delta,\delta[$ gerade, d.h. für alle $|x| < \delta$ gilt $f(x) - f(-x) = 0$. Es ist

$$f(x) - f(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(1-(-1)^k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2a_{2n+1}x^{2n+1}.$$

Diese Potenzreihe stimmt in $]-\delta,\delta[$ mit der Nullreihe überein. Nach dem Identitätssatz müssen alle Koeffizienten a_{2n+1} verschwinden. Analoes Vorgehen liefert die Aussage für ungerades f.

Aufgabe T1 **a)** Die Reihe kann als Differenz zweier Potenzreihen dargestellt werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}x^n.$$

Die erste Reihe ergibt $e^x - 1$, die zweite liefert für $x = 0$ den Wert 0 und für $x \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}x^n = \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{2}{x}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{2(e^x - x - 1)}{x}.$$

Die Potenzreihe stellt eine Funktion f dar, die gegeben ist durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0, \\ e^x - 1 - \dfrac{2(e^x - x - 1)}{x} & x \neq 0. \end{cases}$$

b) Wir erhalten $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{4n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{((x-3)^2)^{2n}}{(2n)!} = \cosh\big((x-3)^2\big)$, also

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cosh\big((x-3)^2\big).$$

c) Es ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+1)^{2n+2} = (x+1)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+1)^{2n+1} = (x+1)\sin(x+1)$, also

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x+1)\sin(x+1).$$

Aufgabe T2 Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n, \quad \text{also} \quad 1 = (x^2+2x-3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n .$$

Nun gilt wegen $x^2+2x-3 = (x+1)^2 - 4$

$$\begin{aligned}(x^2+2x-3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n .\end{aligned}$$

Diese Potenzreihe soll den Wert 1 haben; wegen des Identitätssatzes für Potenzreihen liefert dies die Gleichungen

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad a_{n-2} - 4a_n = 0 \quad (n \geqslant 2) .$$

Es folgt: $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ und $a_n = \frac{1}{4} a_{n-2}$ für $n \geqslant 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = -(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Wegen $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = (\frac{1}{4})^{(1+1/k)/2} \xrightarrow{k\to\infty} (\frac{1}{4})^{1/2} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = 0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $r = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\,)^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$.

Bemerkung: Man kann die Aufgabe auch lösen, indem man $f(x) = ((x+1)^2-4)^{-1} = -\frac{1}{4}(1 - (\frac{x+1}{2})^2)^{-1}$ als geometrische Reihe entwickelt.

Aufgabe T3 **a)** Es gilt $a_n \leqslant 2^n$, wie man mit vollständiger Induktion sieht:

Induktionsanfang: Die Behauptung ist für $n = 0$ und $n = 1$ richtig.

Induktionsschluss: Ist die Behauptung für $n-1$ und n bewiesen (wobei $n \geqslant 1$), so folgt

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \leqslant 2^n + 2^{n-1} \leqslant 2^n + 2^n = 2^{n+1} .$$

Folglich ergibt sich $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 2$ und damit gilt für den Konvergenzradius r der zu betrachtenden Potenzreihe $r = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\,)^{-1} \geqslant \frac{1}{2}$.

b) Für $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - x^2 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) x^n = a_0 + (a_1 - a_0)x = 1 .\end{aligned}$$

c) Aus **b)** wissen wir

$$(1 - x - x^2) f(x) = 1, \qquad \text{also} \qquad f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} .$$

Nun hat x^2+x-1 die Nullstellen $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4+1} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}\,)$ und es gilt

$$\frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-x_1} = \frac{x-x_1-(x-x_2)}{(x-x_2)(x-x_1)} = \frac{x_2-x_1}{x^2+x-1} = \frac{-\sqrt{5}}{x^2+x-1} = \sqrt{5}\cdot f(x)$$

Mit diesen Zahlen x_1 und x_2 hat man also die behauptete Darstellung.

d) Allgemein gilt

$$\frac{1}{x-x_0} = -\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{1-x/x_0} = -\frac{1}{x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_0}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{x_0^{n+1}}\,.$$

Aus **c)** ergibt sich somit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{x_1^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{x_2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}}\right)x^n\,.$$

Wegen

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}\,)} = \frac{2(-1-\sqrt{5}\,)}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

liefert dann der Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Aufgabe T4 **a)** Wir suchen eine Darstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nun ist

$$f(x) = \left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{(1+x+x^2)(1-x)}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{1-x^3}\right)^2 = (1-x)^2\,\frac{1}{(1-x^3)^2}$$

und gemäß Übungsblatt 9, Aufgabe 4 ergibt sich für $|x|<1$

$$= (1-2x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}\bigl((n+1)x^{3n} - 2(n+1)x^{3n+1} + (n+1)x^{3n+2}\bigr)\,.$$

Folglich gilt: $a_{3n} = a_{3n+2} = n+1$ und $a_{3n+1} = -2(n+1)$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$.

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist offenbar 1.

b) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um den Punkt 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(\tfrac{\pi}{4}+z-\tfrac{\pi}{4}) = \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos(z-\tfrac{\pi}{4}) + \cos(\tfrac{\pi}{4})\sin(z-\tfrac{\pi}{4}) \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-\tfrac{\pi}{4})^{2k} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-\tfrac{\pi}{4})^{2k+1} \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \frac{\pi}{4})^n$ gilt also:

$$a_{2k} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

c) Es gilt $1 - z - 2z^2 = (1+z)(1-2z)$. Daher machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a(1-2z) + b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a + b + (-2a+b)z}{1-z-2z^2}\,,$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a + b = 1$ und $-2a + b = -1$. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2/9}{1+(z-2)/3} + \frac{-1/9}{1+2(z-2)/3} \\ &= \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n \end{aligned}$$

für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ und $\frac{2}{3}|z-2| < 1$. Für die Koeffizienten in $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ ergibt sich also $a_n = \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2 - 2^n)$. Der Konvergenzradius ist $\frac{3}{2}$.

d) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$, also

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}4^k x^{2k}\,.$$

Für $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt also $a_0 = 1$, $a_{2k-1} = 0$ und $a_{2k} = \frac{1}{2}(-1)^k 4^k/(2k)!$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius ist offenbar ∞.