UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. H. Uecker

WS 2004/2005
14.01.2005

11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Bestimmen Sie jeweils die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 der Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für

a) $\tanh x$, **b)** $\dfrac{e^x}{\cos x}$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in [-1, 1]$ gilt

$$\arcsin_{k+1}(x) = \arccos_k(x) + \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 3 Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(\cosh z + \sinh z)^n = \cosh(nz) + \sinh(nz)\,.$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k!} = \cos(\sin x)e^{\cos x}$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k!} = \sin(\sin x)e^{\cos x}$ für alle $x \in \mathbb{R}\,.$

c) Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos w - \cos z = -2\sin\left(\dfrac{w+z}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{w-z}{2}\right).$

d) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\, 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kz) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{2\sin(z/2)}\,.$

Aufgabe 4 Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Für jedes $\alpha > 0$ gilt: $\ln x = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$,

b) $x\sin(x^{-1}) = O(x)$ für $x \to 0$,

c) $\sin x = x + o(x^2)$ für $x \to 0$,

d) $\sqrt{1+x^2} = x + O(1/x)$ für $x \to \infty$.

Aufgabe T1 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)}$, **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - \cos x}{\tan x^2}$ $(a > 0)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$, **d)** $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\tan(2x)}$.

Hinweis zu **c)** und **d)**: Logarithmieren Sie den zu untersuchenden Term.

— bitte wenden —

Aufgabe T2 Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

a) f stetig?

b) f differenzierbar?

c) f differenzierbar und f' beschränkt?

d) f stetig differenzierbar?

Aufgabe T3

a) Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \tag{1}$$

Hinweis: Setzen Sie $\ln(x+1) = y$, und schreiben Sie den zu berechnenden Grenzwert als Grenzwert für die Exponentialfunktion.

b) Folgern Sie hieraus: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Hinweis: Ersetzen Sie in (1) x durch $\dfrac{x}{n}$ (mit festem x).

Aufgabe T4 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}$.

a) Beweisen Sie, dass f injektiv ist und zeigen Sie $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

b) Berechnen Sie daraus die Ableitung der Umkehrfunktion von f.

c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie daraus erneut die Ableitung von f^{-1}.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$ sowie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$.

Hinweis. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben sinb für die Tutorien gedacht.