UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. H. Uecker

WS 2004/2005
14.01.2005

Lösung zum 11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{also} \qquad \sinh x = \cosh x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Setzen wir die Potenzreihendarstellungen von $\sinh x$ und $\cosh x$ ein, so bedeutet dies

$$x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = \left(1 + \tfrac{1}{2!}x^2 + \cdots\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right) .$$

Wir multiplizieren auf der rechten Seite aus; dann haben wir die Gleichung

$$x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = a_0 + a_1 x + (a_2 + \tfrac{1}{2!}a_0)x^2 + (a_3 + \tfrac{1}{2!}a_1)x^3 + \cdots .$$

Somit liefert der Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 + \tfrac{1}{2!}a_0 = 0, \quad a_3 + \tfrac{1}{2!}a_1 = \tfrac{1}{3!} ,$$

also $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ und $a_3 = -\frac{1}{3}$.

b) Wir müssen die Gleichung $e^x = (\cos x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$, also

$$1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = \left(1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + - \cdots\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right)$$

betrachten. Die rechte Seite ergibt

$$a_0 + a_1 x + (a_2 - \tfrac{1}{2!}a_0)x^2 + (a_3 - \tfrac{1}{2!}a_1)x^3 + \cdots$$

und der Vergleich mit der linken Seite liefert $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 - \frac{1}{2!}a_0 = \frac{1}{2!}$ sowie $a_3 - \frac{1}{2!}a_1 = \frac{1}{3!}$, also $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ und $a_3 = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 2 Die Funktion $\arcsin_{k+1}$ ist die Umkehrfunktion der bijektiven Funktion $\sin : [k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{3\pi}{2}] \to [-1, 1]$ und $\arccos_k$ ist die Umkehrfunktion der bijektiven Funktion $\cos : [k\pi, (k+1)\pi] \to [-1, 1]$. Also wird durch $h(x) := \arccos_k(x) + \frac{\pi}{2}$ eine Funktion von $[-1, 1]$ nach $[k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ definiert.

Um die behauptete Gleichheit nachzuweisen, müssen wir somit nur noch zeigen, dass $\sin \circ h$ die Identität ist; $h \circ \sin$ brauchen wir nicht zu betrachten.

(Allgemein gilt nämlich: Ist $f : X \to Y$ bijektiv und $g : Y \to X$ eine Funktion mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, so folgt $g = f^{-1}$. Denn wenn $g(y) \neq f^{-1}(y)$ für ein $y \in Y$ gelten würde, so folgte wegen der Injektivität von f die Absurdität $y = f(g(y)) \neq f(f^{-1}(y)) = y$.)

Wegen $\sin(y + \frac{\pi}{2}) = \sin(y)\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(y)\sin(\frac{\pi}{2}) = \cos y$ ergibt sich

$$\sin(h(x)) = \sin(\arccos_k(x) + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(\arccos_k(x)) = x .$$

Aufgabe 3 **a)** Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cosh z + \sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} + \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{2e^z}{2} = e^z .$$

Also ergibt sich $(\cosh z + \sinh z)^n = (e^z)^n = e^{nz} = \cosh(nz) + \sinh(nz)$.

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx) + i\sin(kx)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\cos x + i \sin x)^k}{k!} \\ &= e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} e^{i \sin x} = e^{\cos x}\big(\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)\big) .\end{aligned}$$

Vergleicht man nun Real- und Imaginärteil, so folgt die Behauptung.

c) Für $w, z \in \mathbb{C}$ setzen wir $a := \frac{1}{2}(w + z)$ und $b := \frac{1}{2}(w - z)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\cos w &= \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos z &= \cos(a - b) = \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\cos w - \cos z = -2\sin(a)\sin(b) ,$$

und das ist die Behauptung.

d) Mit der geometrischen Summenformel erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kz) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{iz}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{iz})^k + e^{-iz}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-iz})^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{iz}\frac{1-(e^{iz})^n}{1-e^{iz}} + e^{-iz}\frac{1-(e^{-iz})^n}{1-e^{-iz}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{iz}\frac{e^{-iz/2} - e^{iz(n-1/2)}}{e^{-iz/2} - e^{iz/2}} + e^{-iz}\frac{e^{iz/2} - e^{-iz(n-1/2)}}{e^{iz/2} - e^{-iz/2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{iz/2} - e^{-iz/2} - e^{iz/2} + e^{iz(n+1/2)} + e^{-iz/2} - e^{-iz(n+1/2)}}{e^{iz/2} - e^{-iz/2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{iz(n+1/2)} - e^{-iz(n+1/2)}}{e^{iz/2} - e^{-iz/2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{iz(n+1/2)} - e^{-iz(n+1/2)}}{2i} \cdot \frac{2i}{e^{iz/2} - e^{-iz/2}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{2\sin(z/2)}\end{aligned}$$

Aufgabe 4 **a)** Die Aussage „$\ln x = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$“ bedeutet definitionsgemäß, dass $(\ln x)/x^\alpha \to 0$ für $x \to \infty$ gilt. Diese Grenzwertaussage ist für $\alpha \in \mathbb{N}$ aus der Vorlesung bekannt; sie gilt aber sogar für alle $\alpha > 0$. Für $x > 1$ ergibt sich nämlich

$$0 < \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln x}{e^{\alpha \ln x}} = \frac{\ln x}{1 + \alpha \ln x + \frac{1}{2!}(\alpha \ln x)^2 + \cdots} \leqslant \frac{\ln x}{\frac{1}{2!}(\alpha \ln x)^2} = \frac{2}{\alpha^2 \ln x} \xrightarrow{x \to \infty} 0 .$$

b) Die Aussage ist äquivalent dazu, dass $x\sin(x^{-1})/x$ für $x \to 0$ beschränkt ist. Dies ist wegen $|\sin(x^{-1})| \leqslant 1$ offensichtlich richtig.

c) Diese Aussage bedeutet $\sin x - x = o(x^2)$ für $x \to 0$ und dies stimmt wegen

$$\frac{\sin x - x}{x^2} = \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots) - x}{x^2} = \frac{-\frac{1}{3!}x^3 + - \cdots}{x^2} = -\frac{1}{3!}x^1 + - \cdots \xrightarrow{x\to 0} 0\,.$$

d) Dies ist äquivalent zu $\sqrt{1+x^2} - x = O(1/x)$ für $x \to \infty$, und dies trifft zu, denn

$$\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1/x}\right| = \left|x\big(\sqrt{1+x^2}-x\big)\right| = \left|\frac{x(1+x^2-x^2)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right| \leqslant \left|\frac{x}{x}\right| = 1\,.$$

Aufgabe T1 **a)** Wir verwenden die Potenzreihen der vorkommenden Funktionen.

$$\frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)} = \frac{(x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) - (x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots)}{x((1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots) - 1)} = \frac{\frac{2}{3!}x^3 + \cdots}{\frac{1}{2!}x^3 + \ldots} \xrightarrow{x\to 0} \frac{2\cdot 2!}{3!} = \frac{2}{3}\,.$$

(Beim Grenzübergang kürzt man mit x^3 und verwendet die Stetigkeit von Potenzreihen.)

b) Auch hier kommen wieder Potenzreihen zum Einsatz:

$$\begin{aligned}\frac{a^{x^2} - \cos x}{\tan x^2} &= \frac{(\cos x^2)(e^{x^2\ln a} - \cos x)}{\sin x^2}\\ &= \frac{(\cos x^2)\big((1 + (x^2\ln a) + \frac{1}{2!}(x^2\ln a)^2 + \cdots) - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + - \cdots)\big)}{x^2 - \frac{1}{3!}(x^2)^3 + - \cdots}\\ &= \frac{(\cos x^2)(x^2(\ln a + \frac{1}{2}) + \cdots)}{x^2 - \frac{1}{3!}(x^2)^3 + - \cdots} \xrightarrow{x\to 0} \ln a + \tfrac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(e^x - 1)/x \xrightarrow{x\to 0} 1$ gilt. Folglich ergibt sich

$$\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1} = \lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{e^{\ln y}-1} = 1\,, \quad \text{denn} \quad \ln y \xrightarrow{y\to 1} 0$$

Wir setzen nun $f(x) := \frac{2x+3}{2x+1}$. Dann gilt $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 1$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\big(\ln(f(x))^{x+1}\big) &= \lim_{x\to\infty}\big((x+1)\ln f(x)\big) = \lim_{x\to\infty}\left((x+1)(f(x)-1)\frac{\ln f(x)}{f(x)-1}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}(x+1)(f(x)-1)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{f(x)-1} = \lim_{x\to\infty}(x+1)(f(x)-1)\\ &= \lim_{x\to\infty}(x+1)\frac{2}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x+1} = 1\,.\end{aligned}$$

Für den zu untersuchenden Grenzwert ergibt sich also wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^{x+1} = \lim_{x\to\infty}e^{\ln(f(x))^{x+1}} = \exp\big(\lim_{x\to\infty}\ln(f(x))^{x+1}\big) = e^1 = e\,.$$

d) Wieder untersuchen wir zunächst den Logarithmus:

$$\ln\big((\tan x)^{\tan(2x)}\big) = \tan(2x)\ln(\tan x) = \tan(2x)(\tan x - 1)\frac{\ln(\tan x)}{\tan x - 1}$$

Genau wie eben folgt dann wegen $\tan x \xrightarrow{x\to\pi/4} 1$

$$\lim_{x\to\pi/4} \ln\big((\tan x)^{\tan(2x)}\big) = \lim_{x\to\pi/4} \tan(2x)(\tan x - 1)\,.$$

Unter Verwendung der Additionstheoreme ergibt sich

$$\begin{aligned}\tan(2x)(\tan x - 1) &= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \\ &= -\frac{2\sin x}{\cos x + \sin x} \xrightarrow{x\to\pi/4} -\frac{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1\,.\end{aligned}$$

Der zu berechnende Grenzwert ist somit e^{-1}.

Aufgabe T2 Die Funktion f erfüllt in $(0,1]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Eigenschaften a) bis d). Wir betrachten deshalb nur $x = 0$.

a) $\alpha \leqslant 0$: Wegen $\sin(\frac{4n+1}{2}\pi) = 1$ $(n \in \mathbb{Z})$ liefert $x_k = \frac{1}{(\frac{4k+1}{2}\pi)^2}$:
$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{x_k}} = 1 \neq f(0) = 0$, also f für $\alpha = 0$ in $x = 0$ unstetig,
da $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k^{|\alpha|}} \sin\frac{1}{\sqrt{x_k}} = \infty$, ist f auch für $\alpha < 0$ in $x = 0$ unstetig.
$a > 0$: Da $\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ beschränkt ist, gilt $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin\frac{1}{\sqrt{x}} = 0 = f(0)$, also f in $x = 0$ stetig.

b) Ist f in $x = 0$ unstetig, dann auch nicht differenzierbar. Wir betrachten daher: $\alpha > 0$.
$0 < \alpha < 1$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ existiert nicht, da mit x_k wie in a)
$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k^{1-\alpha}} \sin\frac{1}{\sqrt{x_k}} = \infty$. Also f in $x = 0$ nicht differenzierbar.
$\alpha = 1$: wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{x_k}} = 1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{x'_k}} = 0$ mit $x'_k = \frac{1}{(k\pi)^2}$ existiert $f'(0)$ nicht und somit ist f nicht differenzierbar in 0.
$\alpha > 1$: hier ist $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ und somit ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

c) Wir betrachten wegen b) nur $\alpha > 1$. Für $x \in (0,1]$ ist $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{\sqrt{x}} + x^\alpha(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$
$= \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^{\alpha-\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$
$1 < \alpha < \frac{3}{2}$: Mit $x_k = \frac{1}{(2k\pi)^2}$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} f'(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty}\Big(-\frac{1}{2x_k^{\frac{3}{2}-\alpha}}\Big) = -\infty$, also f' unbeschränkt.
$a \geqslant \frac{3}{2}$: $|f'(x)| = |\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^{\alpha-\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}| \leqslant \alpha\underbrace{|x^{\alpha-1}|}_{\leqslant 1}\underbrace{|\sin\frac{1}{\sqrt{x}}|}_{\leqslant 1} + \frac{1}{2}\underbrace{|x^{\alpha-\frac{3}{2}}|}_{\leqslant 1}\underbrace{|\cos\frac{1}{\sqrt{x}}|}_{\leqslant 1}$

$\leqslant \alpha + \frac{1}{2}$, f' also beschränkt.

d) $\alpha = \frac{3}{2}$: $x_k = \frac{1}{(2k\pi)^2}$, $\lim\limits_{k\to\infty} f'(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty}(\alpha x_k^{\alpha-1}\sin(2k\pi) - \frac{1}{2}\cos(2k\pi)) = -\frac{1}{2} \neq f'(0) = 0$,
also f' für $\alpha = \frac{3}{2}$ unstetig.

$\alpha > \frac{3}{2}$: $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\alpha x^{\alpha-1}}_{\to 0} \underbrace{\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{beschränkt}} - \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{2} x^{\alpha-\frac{3}{2}}}_{\to 0} \underbrace{\cos\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{beschränkt}} = 0 = f'(0)$, also für $\alpha > \frac{3}{2}$ ist die Funktion f stetig differenzierbar.

Aufgabe T3 **a)** Wir setzen gemäß Hinweis $y = \ln(x+1)$ bzw. $x = e^y - 1$. Wir erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{1 + y + \frac{y^2}{2!} + \ldots - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y + \frac{y^2}{2!} + \ldots} = 1$$

b) Für festes x ist gemäß Teilaufgabe a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = 1$. Es ist also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x} \ln(1 + \frac{x}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{x}{n})^n \underbrace{=}_{\text{Stetigk. d. ln-Fkt.}} \frac{1}{x} \ln\big(\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n\big) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\big(\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n\big) = x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x.$$

Aufgabe T4 **a)** Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2} \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$1-(f(x))^2 = 1 - \big(1 - 8(e^{2x}+4)^{-1}\big)^2 = 1 - \big(1 - 16(e^{2x}+4)^{-1} + 64(e^{2x}+4)^{-2}\big)$$
$$= 16(e^{2x}+4)^{-1} - 64(e^{2x}+4)^{-2} = 16(e^{2x}+4)^{-2}\big((e^{2x}+4) - 4\big) = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

b) f hat als Bildbereich $(-1,1)$, denn $(e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0, \frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\forall y \in (-1,1): \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 - (f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$1 - 8(e^{2x}+4)^{-1} = y \quad \leftrightarrow \quad (1-y)^{-1} = \tfrac{1}{8}(e^{2x}+4) \quad \leftrightarrow \quad 8(1-y)^{-1} - 4 = e^{2x}$$
$$\leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}\ln\big(8(1-y)^{-1} - 4\big)$$

Daraus ergibt sich

$$(f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{8(1-y)^{-1} - 4} \cdot \frac{8}{(1-y)^2} = \frac{4}{8(1-y) - 4(1-y)^2} = \frac{4}{4-4y^2} = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

d) Es gilt $f(0) = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x - \tfrac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y-y_0) + f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y + \tfrac{15}{16}\,.$$