UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. H. Uecker

WS 2004/2005
21.1.2005

Lösung zum 13. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Oberfläche A und Volumen V einer zylindrischen Konservendose mit Radius r und Höhe h berechnen sich wir folgt:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \text{und} \quad V = \pi r^2 h\,.$$

Bei vorgegebenem Volumen V gilt somit $h = V/(\pi r^2)$ und für die Oberfläche ergibt sich $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2V/r$.

Die Oberfläche soll möglichst klein werden. Wegen $A(r) \to \infty$ für $r \to 0$ und für $r \to \infty$ folgt aus der Stetigkeit von $A(r)$, dass A auf $(0,\infty)$ ein Minimum hat. (Genaue Begründung: Es gibt ε und M mit $\varepsilon < 1 < M$ und $A(r) > A(1)$ für $r < \varepsilon$ und für $r > M$. Das Minimum, das A als stetige Funktion auf $[\varepsilon, M]$ besitzt, ist also auch das Minimum auf $(0,\infty)$.) Dort muss die Ableitung verschwinden:

$$A'(r) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad r^3 = \frac{V}{2\pi} \quad \leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,.$$

Für die Höhe ergibt sich dann

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi(\frac{V}{2\pi})^{2/3}} = \frac{V^{1/3}\cdot 2^{2/3}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r\,.$$

Aufgabe 2 **a)** Sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruchs streben für $x \to 0$ gegen 0. Zudem ist für $0 < |x| < \pi$ die Ableitung des Nenners ($\sin x$) ungleich 0. Daher liefert die Regel von de l'Hospital: Wenn

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

existiert, so existiert auch der ursprünglich zu untersuchende Grenzwert und die beiden sind gleich. Hier haben wir erneut die Form „$\frac{0}{0}$“ und die Ableitung des Nenners ist $\neq 0$ in einer Umgebung von 0. Also erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2\,.$$

b) Auch hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils „$\frac{\infty}{\infty}$“ und die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x ungleich 0). Dies führt auf

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(falls die Grenzwerte existieren),}$$

hilft also nicht, den Grenzwert zu berechnen. Einfaches Kürzen mit e^x liefert aber

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1\,.$$

c) Auch hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „$\frac{0}{0}$“; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 0 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(x\ln x)' = x^x(1+\ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x)^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2\,.$$

d) Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + x^2\sin(1/x)\frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n/\cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x\cos(1/x) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

e) Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x \to \infty$ gegen ∞. Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ und

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x\cos^2 x) \\ &= e^{\sin x}\cos x(2\cos x + x + \sin x\cos x)\,. \end{aligned}$$

Also wird $g'(x)$ auch für beliebig große x durch den Faktor $\cos x$ immer wieder 0. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar.

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

existiert nicht (Betrachte $x_n := (n+\frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene x, für die $g'(x) \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{e^{\sin x}(2\cos x + x + \sin x\cos x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

Aufgabe 3 Offenbar gilt $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$. Die stetige Funktion f muss daher ein Minimum haben. Wir finden es durch Nullsetzen der Ableitung:

$$f'(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 0 \quad \leftrightarrow \quad nx - \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$$

Also ergibt sich $a = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$; das angegebene Messergebnis ist das arithmetische Mittel aller Messwerte. (Beachte: Das Minimierungsproblem ist eindeutig lösbar.)

Betrachten wir nun noch die Funktion g. O.B.d.A. gelte $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Probiert man ein paar Beispiele aus, kommt man zu folgender Vermutung:

Ist n gerade, so gilt $g(a) = \min\{\, g(x) : x \in \mathbb{R} \,\}$ genau dann, wenn $a \in [a_{n/2}, a_{1+n/2}]$.

(Hier ist das Minimierungsproblem also nicht eindeutig lösbar.)

Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $n = 2$. Für $x \in [a_1, a_2]$ ist $g(x) = x - a_1 - (x - a_2) = a_2 - a_1$, für $x < a_1$ gilt $g(x) = -(x - a_1) - (x - a_2) = a_1 + a_2 - 2x > a_1 + a_2 - 2a_1 = a_2 - a_1$, und $g(x) > a_2 - a_1$ für $x > a_2$ sieht man ebenso ein.

Induktionsschluss: Für ein gewisses gerades n sei die Behauptung gezeigt. Dann gilt

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n+2} |x - a_k| = G(x) + H(x), \qquad \text{wobei} \qquad \begin{aligned} G(x) &:= \sum_{k=2}^{n+1} |x - a_k|, \\ H(x) &:= |x - a_1| + |x - a_{n+1}|\,. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung wird G genau auf $[a_{1+n/2}, a_{2+n/2}]$ minimal und laut Induktionsanfang ist H auf $[a_1, a_{n+2}]$ konstant, ansonsten größer. Damit folgt die Behauptung auch für $n + 2$.

Völlig analog zeigt man die Aussage für ungerades n:

Ist n ungerade, so gilt $g(a) = \min\{\, g(x) : x \in \mathbb{R} \,\}$ genau dann, wenn $a = a_{(n+1)/2}$.

Aufgabe 4 Wir nehmen an, es gelte $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Potenzreihe dürfen wir gliedweise differenzieren, es gilt also

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n\,.$$

Dies soll für alle $x \in \mathbb{R}$ übereinstimmen mit

$$-\omega^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\omega^2 a_n x^n\,.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen ist die Gleichung $y'' = -\omega^2 y$ also genau dann erfüllt, wenn

$$(*) \qquad (n+2)(n+1) a_{n+2} = -\omega^2 a_n \quad \text{für alle } n \geqslant 0$$

gilt. Die Forderungen $y(0) = y_0$ und $y'(0) = 0$ bedeuten $a_0 = y_0$ und $a_1 = 0$. Induktiv folgt dann aus $(*)$

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad a_{2n} = y_0 \omega^{2n} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Potenzreihe stellt die Funktion $y(x) = y_0 \cos(\omega x)$ dar.

Aufgabe T1 Mit Potenzreihen kommt man hier sehr schnell ans Ziel: Wegen

$$\sin^2 x = \left(x - \tfrac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \tfrac{2}{3!}x^4 + o(x^5), \quad x \to 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^5))}{x^2(x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^5))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!}x^4 + o(x^5)}{x^4 - \frac{2}{3!}x^6 + o(x^7)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!} + o(x^5)/x^4}{1 - \frac{2}{3!}x^2 + o(x^7)/x^4} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Mit der Regel von de l'Hospital dauert es etwas länger: Wir wenden sie viermal an; die entsprechenden Stellen sind mit $(*)$ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\sin x \cos x}{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{2x \sin^2 x + x^2 \sin(2x)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos(2x)}{2\sin^2 x + 4x \sin x \cos x + 2x \sin(2x) + 2x^2 \cos(2x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos(2x)}{2\sin^2 x + 4x \sin(2x) + 2x^2 \cos(2x)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\sin(2x)}{4\sin x \cos x + 4\sin(2x) + 8x\cos(2x) + 4x\cos(2x) - 4x^2 \sin(2x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin(2x)}{(6 - 4x^2)\sin(2x) + 12x\cos(2x)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{8\cos(2x)}{-8x\sin(2x) + 2(6 - 4x^2)\cos(2x) + 12\cos(2x) - 24x\sin(2x)} \\ &= \frac{8}{0 + 12 + 12 + 0} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe T2 Es gilt $L = r\pi + 2x + 2r$, also $r = (L - 2x)/(\pi + 2)$, also

$$f(x) = \frac{\pi}{2}r^2 + 2rx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{L - 2x}{\pi + 2}\right)^2 + 2\frac{L - 2x}{\pi + 2}x.$$

Weiter gilt $0 \leqslant x \leqslant L/2$ und

$$f(0) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{L}{\pi + 2}\right)^2, \quad f(L/2) = 0.$$

Die Bedingung

$$f'(x) = 4\frac{L - \pi x - 4x}{(\pi + 2)^2} = 0$$

liefert die eindeutige Extremstelle $x_0 = L/(\pi + 4)$ und mit $f(x_0) > f(0)$ liegt dort das Maximum.

Aufgabe T3 **a)** Für die durch $f(x) := \ln(2 + x)$ gegebene Funktion f, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2 + x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2 + x)^2}\,.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2!}f''(\xi)x^2 = \ln 2 + \tfrac{1}{2}x - \frac{x^2}{2(2 + \xi)^2}\,,$$

und dies stimmt offenbar auch für $x = 0$ (mit beliebigem ξ). Daher gilt wegen $\xi \in [-1, 1]$

$$|f(x) - \ln 2 - \tfrac{1}{2}x| = \left|\frac{x^2}{2(2 + \xi)^2}\right| \leqslant \frac{x^2}{2(2 - 1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

b) Wir betrachten $f(x) := \frac{10}{7}\sqrt{1 + x}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi \in (-\frac{1}{50}, 0)$ mit

$$\sqrt{2} = f(-\tfrac{1}{50}) = T_{n-1}(f, 0)(-\tfrac{1}{50}) + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(-\tfrac{1}{50})^n\,.$$

Jetzt wollen wir n so groß wählen, dass das Restglied betragsmäßig kleiner als 10^{-6} wird. Es zeigt sich, dass dies schon für $n = 3$ erfüllt ist; wegen

$$\left|\tfrac{1}{3!}\left(-\tfrac{1}{50}\right)^3\right| = \tfrac{1}{6\cdot 50^3} = \tfrac{8}{6\cdot 100^3} = \tfrac{4}{3}10^{-6}$$

müssen wir nur noch $|f^{(3)}(\xi)| < \frac{3}{4}$ zeigen. Wegen $|\xi| \leqslant \frac{1}{50}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
|f^{(3)}(\xi)| &= |\tfrac{10}{7} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (-\tfrac{1}{2}) \cdot (-\tfrac{3}{2}) \cdot (1 + \xi)^{-5/2}| = \tfrac{15}{28}(1 + \xi)^{-5/2} \\
&\leqslant \frac{15}{28}\left(\frac{49}{50}\right)^{-5/2} = \frac{15 \cdot \sqrt{50}^5}{28 \cdot 7^5} \leqslant \frac{15 \cdot 8 \cdot 50^2}{28 \cdot 7^5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5 \cdot 8 \cdot 50^2}{7^6}\,.
\end{aligned}$$

Nun möchten wir $\frac{5\cdot 8\cdot 50^2}{7^6} < 1$ zeigen. Dies stimmt wegen

$$7^6 = 49^3 > 48^3 = (2^4 \cdot 3)^3 = 2^{12} \cdot 3^3 = 4096 \cdot 27 > 4000 \cdot 25 = 100000 = 5 \cdot 8 \cdot 50^2\,.$$

(Natürlich könnte man auch 7^6 ausrechnen.) Als Näherung für $\sqrt{2}$ erhalten wir unter Benutzung von $f'(x) = \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2}$ und $f''(x) = \frac{10}{7} \cdot (-\frac{1}{4})(1 + x)^{-3/2}$

$$\begin{aligned}
T_2(f, 0)(-\tfrac{1}{50}) &= f(0) + f'(0)(-\tfrac{1}{50}) + \tfrac{1}{2!}f''(0)(-\tfrac{1}{50})^2 = \tfrac{10}{7}(1 + \tfrac{1}{2} \cdot (-\tfrac{1}{50}) - \tfrac{1}{8} \cdot (-\tfrac{1}{50})^2) \\
&= \tfrac{10}{7}(1 - \tfrac{1}{100} - \tfrac{1}{20000}) = \tfrac{19799}{14000} \approx 1{,}414214\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe T4 **a)** Dass f auf $[-1,1]$ ein Maximum hat, folgt aus der Stetigkeit von f. Wir betrachten nun die Ableitungen $f'(x) = x^3-3x+1$ und $f''(x) = 3x^2-3 = 3(x^2-1)$. Für alle $x \in (-1,1)$ gilt $f''(x) < 0$, d. h. auf diesem Intervall ist f' streng monoton fallend. Wegen $f'(-1) = 3$ und $f'(1) = -1$ existiert also genau ein $\xi \in (-1,1)$ mit $f'(\xi) = 0$. (Beachte: f' ist stetig.) Die Funktion f wächst auf $[-1,\xi]$ streng monoton und fällt auf $[\xi,1]$ streng monoton. Genau in ξ nimmt f also das Maximum an.

b) Wir wollen ξ, also die Nullstelle von $g(x) := f'(x) = x^3 - 3x + 1$, bestimmen. Das Newtonverfahren hat die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = h(x_n), \qquad \text{mit} \quad h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{x^3-3x+1}{3x^2-3} = \frac{2x^3-1}{3x^2-3}.$$

Mit $x_0 = 0$ ergibt sich $x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = (2 \cdot \frac{1}{27} - 1)/(3 \cdot \frac{1}{9} - 3) = \frac{25}{72}$.

Jetzt zur Fehlerabschätzung und in diesem Zusammenhang zu der Frage: Konvergiert das Newtonverfahren hier überhaupt? Aus der Vorlesung ist bekannt: Gilt für die Funktion $h : [a,b] \to [a,b]$ die Abschätzung $|h'(x)| \leqslant q < 1$ auf $[a,b]$, so konvergiert die durch $x_{n+1} := h(x_n)$ definierte Folge gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt ξ von h, und zwar für jedes $x_0 \in [a,b]$. Zudem gilt dann

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Zunächst müssen wir also ein geeignetes Intervall $[a,b]$ finden. Wir wählen $[0,\frac{1}{2}]$; die Funktion h bildet dieses Intervall in sich ab, denn für $x \in [0,\frac{1}{2}]$ gilt $2x^3 - 1 \in [-1,0]$ und $3x^2 - 3 \in [-3,-2]$, also $h(x) \in [0,\frac{1}{2}]$. Als Ableitung von h erhalten wir

$$h'(x) = 1 - \frac{g'(x)g'(x) - g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = -\frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = -\frac{(x^3-3x+1)6x}{(3x^2-3)^2}.$$

Wegen $|x^3 - 3x + 1| \leqslant 1$ auf $[0,\frac{1}{2}]$ gilt also

$$\forall x \in [0,\tfrac{1}{2}]: \quad |h'(x)| \leqslant \frac{1 \cdot 3}{(\frac{3}{4}-3)^2} \leqslant \frac{3}{4} =: q < 1.$$

Wir erhalten daraus die (nicht besonders gute) Abschätzung

$$|\xi - x_2| \leqslant \frac{q^2}{1-q}|x_1 - x_0| = \frac{\frac{9}{16}}{1-\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4}.$$

c) Die Gleichung $f'(x) = x^3-3x+1 = 0$ bedeutet $x = \frac{1}{3}(x^3+1) =: F(x)$. Die Funktion F erfüllt auf $[0,\frac{2}{3}]$ die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes (für $x \in [0,\frac{2}{3}]$ gilt $F(x) \in [0,\frac{2}{3}]$ und $|F'(x)| = x^2 \leqslant \frac{4}{9} =: q < 1$); also konvergiert die durch $x_{n+1} = F(x_n)$ gegebene Folge für jedes $x_0 \in [0,\frac{2}{3}]$. Aber auch für beliebiges $x_0 \in [-1,1]$ liegt Konvergenz vor, denn schon x_1 liegt dann wieder in $[0,\frac{2}{3}]$.