

14. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

a) $\sqrt{1+x} < 1 + x/2, \quad x > 0$ b) $x \cos x < \sin x, \quad x \in (0, \pi)$

Aufgabe 2 Sei $g : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a > 0$. Zeigen Sie: für alle $\alpha > 1$ ist die Funktion $f(x) = |x|^\alpha g(x)$, $x \in (-a, a)$, differenzierbar, und $f'(0) = 0$.

Aufgabe 3 Berechnen Sie jeweils den Wert des Integrals.

a) $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx \quad (k \in \mathbb{Z})$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$
c) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$ d) $\int_0^{a/2} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
e) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} dt$ f) $\int_1^e x \ln x dx$

Aufgabe 4 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$

Hinweis: Mittelwertsatz der Integralrechnung und Regel von de l'Hospital

Aufgabe T1 Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2) dx = \frac{(-1)^k}{\xi_k}$$

gilt, wobei ξ_k eine Zahl zwischen $\sqrt{k\pi}$ und $\sqrt{(k+1)\pi}$ ist.

Aufgabe T2 Beweisen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren.

a) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta \sin(x^2) dx$ b) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta 2x \sin(x^4) dx$

Aufgabe T3 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^1 (1 + 2x)^3 dx$

b) $\int^x \text{Arcsin } t dt$

c) $\int_0^\pi (\sin x)^2 dx$

d) $\int^x \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt$

e) $\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt$

f) $\int_1^4 \text{Arctan } \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$

g) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2t}{1 - \sin t} dt$

h) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2 + 4t - t^2}} dt$

Aufgabe T4 Es sei $\beta > 0$. Berechnen Sie die Integrale

$$I_n := \int_0^\beta x^n e^{-x} dx \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

und bestimmen Sie dann den Grenzwert $\lim_{\beta \rightarrow \infty} I_n$.

Hinweise zur 2. Übungsklausur:

- Die zweite Übungsklausur zur Vorlesung HM I findet am 5. Februar (Samstag), 8–10 Uhr statt. Studierende der Physik mit Anfangsbuchstaben A–K schreiben im HMU, mit Anfangsbuchstaben L–Z schreiben im HMO. Die Studierenden der Elektrotechnik schreiben im Gerthsen. Eintragungen in Listen sind nicht erforderlich.
- Bringen Sie Studenausweis und Schreibgerät mit; Papier wird gestellt.
- Zulässige Hilfsmittel: alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z. B. Mitschriften, Übungsblätter, alte Klausuren).
- **Nicht zugelassen** sind dagegen einzelne Blätter und elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner).
- Die korrigierten Übungsklausuren können ab 15.2. (Dienstag) im Sekretariat abgeholt werden.
- Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am 17.2. (Donnerstag) von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.