

15. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Es seien h stetig, f, g differenzierbar und $F(x) := \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt$. Berechne $F'(x)$.

Aufgabe 2 a) Bestimmen Sie alle Funktionen ϕ , die folgender Gleichung genügen:

$$\phi'(x) = \phi(x) \cdot \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Geben Sie alle Funktionen $\phi \in C^0[-1, +1]$ an, für die folgende Gleichung gilt:

$$\phi(x) = \int_0^x \phi(t) dt \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx,$$

indem Sie die Substitution $t = \tan(x/2)$ verwenden.

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz, gegebenenfalls in Abhängigkeit vom Parameter a .

a) $\int_0^{\infty} e^{-t} \ln(1+t) dt$

b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{\cosh x - 1}} dx$

c) $\int_0^1 (\ln x)^4 dx$

d) $\int_0^{\infty} \frac{t^a}{e^t - 1} dt$

Aufgabe T1 Bestimmen Sie

a) $\int e^{ax} \cos(bx) dx$

b) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^a}$

c) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

d) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$

Hinweis: Bei (d) substituieren Sie zunächst $x = \sinh y - 1$.

Aufgabe T2 Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

b) $\int_0^{\infty} \frac{y \ln y}{\sinh y - y} dy$

c) $\int_0^{\infty} e^{sx} \cos(tx) dx \quad (s < 0, t \in \mathbb{R})$

d) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{(2x - 1)^2} dx$

Aufgabe T3 Bestimmen Sie

a) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx, \quad a, b > 0$

b) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

c) $\int \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x} dx$

d) $\int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx, \quad m, n \in \mathbb{N}$