UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. H. Uecker

WS 2004/2005
18.2.2005

Lösung zum 16. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Aus der Vorlesung ist bekannt, dass man die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung sofort in der Hand hat, wenn man die Nullstellen des zugehörigen Polynoms $\lambda^2 - 2\lambda + 3$ kennt; dies sind $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}\,i$. Folglich hat die vorliegende Gleichung die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^x \sin(\sqrt{2}\,x) + C_2 e^x \cos(\sqrt{2}\,x) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) .$$

Dann ist $y(0) = C_2$ und wegen

$$y'(x) = C_1 e^x \sin(\sqrt{2}\,x) + C_1 e^x \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}\,x) + C_2 e^x \cos(\sqrt{2}\,x) - C_2 e^x \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\,x)$$

gilt $y'(0) = \sqrt{2}\,C_1 + C_2$. Die Bedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$ implizieren daher $C_2 = 1$ und $C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die Lösung lautet mithin

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, e^x \sin(\sqrt{2}\,x) + e^x \cos(\sqrt{2}\,x) .$$

b) Das Polynom $\lambda^2 - 5\lambda + 4$ hat die Nullstellen 1 und 4. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet folglich

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} .$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_{\rm p}(x) = Ce^{2x}$. Dann ist $y_{\rm p}' = 2Ce^{2x}$ und $y_{\rm p}'' = 4Ce^{2x}$, also

$$y_{\rm p}'' - 5y_{\rm p}' + 4y_{\rm p} = 4Ce^{2x} - 10Ce^{2x} + 4Ce^{2x} = -2Ce^{2x} .$$

Damit dies $= e^{2x}$ wird, muss $C = -\frac{1}{2}$ gewählt werden. Es folgt $y_{\rm p}(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{4x} .$$

Aus $y(0) = 1$ folgt $-\frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 1$ und aus $y'(0) = -1$ folgt $-1 + C_1 + 4C_2 = -1$. Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, folgt $-3C_2 = \frac{3}{2}$, also $C_2 = -\frac{1}{2}$ und damit $C_1 = 2$. Die Lösung lautet daher

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - \tfrac{1}{2}e^{4x} .$$

Aufgabe 2 Die Bernoullische Differentialgleichung

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

bringen wir zunächst auf die Form

$$\frac{y'}{y^\alpha} + \frac{p(x)}{y^{\alpha-1}} = q(x)\,.$$

Substituieren wir $u = y^{1-\alpha}$, so geht die Gleichung wegen $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ über in

$$\frac{u'}{1-\alpha} + p(x)u = q(x)\,,$$

d. h. in eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für u.

Bei der konkret gegebenen Gleichung setzen wir daher $u = y^{-2}$ und erhalten

$$-\tfrac{1}{2}u' + (\tanh x)u + \tfrac{1}{2}\cosh^2 x = 0\,.$$

Wir lösen zunächst die homogene Gleichung $u' = 2(\tanh x)u$. Sie hat die Lösungen

$$u(x) = C\exp\left(\int^x 2\tanh t\,dt\right) = C\exp(2\ln\cosh x) = C\cosh^2 x \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $u_\mathrm{p}(x) = C(x)u_\mathrm{h}(x)$ mit $u_\mathrm{h}(x) = \cosh^2 x$. Dann folgt

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}u_\mathrm{p}' + (\tanh x)u_\mathrm{p} + \tfrac{1}{2}\cosh^2 x &= -\tfrac{1}{2}(C'u_\mathrm{h} + Cu_\mathrm{h}') + (\tanh x)Cu_\mathrm{h} + \tfrac{1}{2}\cosh^2 x\\ &= -\tfrac{1}{2}C'u_\mathrm{h} + \big(-\tfrac{1}{2}u_\mathrm{p}' + (\tanh x)u_\mathrm{p}\big)C + \tfrac{1}{2}\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(-C'+1)\cosh^2 x\,.\end{aligned}$$

Dies ist $= 0$, wenn $C' = 1$ gilt. Wir wählen daher $C(x) = x$, also $u_\mathrm{p}(x) = x\cosh^2 x$, und erhalten die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$u(x) = u_\mathrm{p}(x) + C\cosh^2 x = (x + C)\cosh^2 x$$

Die Bedingung $y(0) = 1$ bedeutet $u(0) = 1^{-2} = 1$ und hieraus folgt $C = 1$. Die Lösung $u(x) = (x+1)\cosh^2 x$ liefert uns

$$y(x) = (u(x))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x+1}\,\cosh x}\,.$$

Aufgabe 3 Als erstes lösen wir die homogene Gleichung. Da das Polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ hat, lautet die (komplexe) Lösung der homogenen Gleichung

$$y(x) = C_1e^{(1+2i)x} + C_2e^{(1-2i)x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{C})\,.$$

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir jetzt den Ansatz $y_\mathrm{p}(x) = u(x)y_\mathrm{h}(x)$ mit $y_\mathrm{h}(x) := e^{(1+2i)x}$. Dann ergibt sich

$$y_\mathrm{p}' = u'y_\mathrm{h} + uy_\mathrm{h}'\,, \qquad y_\mathrm{p}'' = u''y_\mathrm{h} + 2u'y_\mathrm{h}' + uy_\mathrm{h}''\,,$$

und damit

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}'' - 2y_{\mathrm{p}}' + 5y &= u''y_{\mathrm{h}} + 2u'y_{\mathrm{h}}' + uy_{\mathrm{h}}'' - 2(u'y_{\mathrm{h}} + uy_{\mathrm{h}}') + 5uy_{\mathrm{h}} \\ &= u''y_{\mathrm{h}} + u'(2y_{\mathrm{h}}' - 2y_{\mathrm{h}}) + u(y_{\mathrm{h}}'' - 2y_{\mathrm{h}}' + 5y_{\mathrm{h}}) = u''y_{\mathrm{h}} + 2u'(y_{\mathrm{h}}' - y_{\mathrm{h}})\,. \end{aligned}$$

Nun ist $y_{\mathrm{h}}' - y_{\mathrm{h}} = (1+2i)y_{\mathrm{h}} - y_{\mathrm{h}} = 2iy_{\mathrm{h}}$. Damit y_{p} eine Lösung ist, muss $u'' + 4iu' = -4$ gelten. Dies trifft etwa für $u(x) = ix$ zu. Dann ist $y_{\mathrm{p}}(x) = ixe^{(1+2i)x}$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y(x) = ixe^{(1+2i)x} + C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{C})\,.$$

Die rechte Seite der ursprünglichen Gleichung ist der Realteil der rechten Seite der komplexen Gleichung. Also müssen wir den Realteil nehmen, um die allgemeine (reelle) Lösung der ursprünglichen Gleichung zu bekommen:

$$y(x) = -xe^x \sin(2x) + ae^x \sin(2x) + be^x \cos(2x) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 4 **a)** Die Differentialgleichung führt zu dem Polynom $\lambda^2 + 1$. Dieses hat die Nullstellen i und $-i$. Daher lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Da hier $y(0) = C_2$ und $y(\pi) = -C_2$ gilt, können die Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 1$ nicht erfüllt werden; das Randwertproblem hat folglich keine Lösung.

b) Wir haben hier die gleiche allgemeine Lösung wie in **a)**. Die Randbedingungen besagen diesmal jedoch beide $C_2 = 1$. Damit folgt: Alle Funktionen

$$y(x) = C \sin(x) + \cos(x) \qquad (C \in \mathbb{R})$$

sind Lösungen des Randwertproblems.

c) Das Polynom $\lambda^2 - 1$ hat die Nullstellen 1 und -1. Daher lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = ae^x + be^{-x} \qquad (a, b \in \mathbb{R})\,.$$

Es ist $y(0) = a + b$ und $y'(0) = ae + be^{-1}$. Die zwei Randbedingungen liefern somit die Gleichungen $a + b = 1$ und $ae + be^{-1} = 2$. Wir ziehen das e-fache der ersten von der zweiten Gleichung ab: $be^{-1} - be = 2 - e$. Es folgt

$$b = \frac{2-e}{e^{-1}-e} = \frac{e(e-2)}{e^2-1}\,, \qquad \text{und damit} \qquad a = 1 - b = \frac{2e-1}{e^2-1}\,.$$

Dieses Randwertproblem hat also genau eine Lösung, nämlich

$$y(x) = \frac{(2e-1)e^x + e(e-2)e^{-x}}{e^2-1}\,.$$

Aufgabe 5 OBdA $\Omega_m = 1$. $R'(0) > 0$ impliziert $R'(t) > 0$ solange die Lösung existiert. Also

$$R'(t) = H_0 R_0^{3/2} R(t)^{1/2} > 0 \quad \text{(kein Schrumpfen niemals!)},$$

was wir mit TdV lösen zu

$$t = \frac{2(R^{3/2} - R_0^{3/2})}{3H_0 R_0^{3/2}}, \quad \text{also} \quad t_u = -2/(3H_0).$$