

2. Aufgabenblatt.

Aufgabe 2a):

a) und b): Sind $a = p_1^{s_1} \cdot \dots \cdot p_k^{s_k}$, $b = p_1^{s_1} \cdot \dots \cdot p_k^{s_k}$ die Primzahlzerlegungen von a, b , dann gilt

$$\operatorname{ggT}(a, b) = p_1^{\min\{r_1, s_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{r_k, s_k\}}$$

$$\operatorname{kgV}(a, b) = p_1^{\max\{r_1, s_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\max\{r_k, s_k\}}$$

b) ergibt sich durch Einsetzen unter Beachtung von

$$\min\{r_j, s_j\} + \max\{r_j, s_j\} = r_j + s_j$$

zu a):

$$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13, \quad 136 = 2^3 \cdot 17$$

$$\Rightarrow \operatorname{ggT}(234, 136) = 2, \quad \operatorname{kgV} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17$$

c) Äquivalent: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Konträre (Widerspruchsbeweis): Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Der Beweis ist erbracht, wenn es gelingt eine weitere Primzahl zu konstruieren. Hierbei verwenden wir die leicht zu beweisende Aussagen:

A1: Sind n, m und l natürliche Zahlen mit $n = m + l$ und zwei dieser Zahlen teilerfremd durch $k \in \mathbb{N}$ teilbar, dann auch die dritte.

A2: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a \leq n$ für jeden Teiler a von n .

A3: Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt einen ^{kleinsten} Teiler $k > 1$, und dieser ist Primzahl. Insbesondere gilt $k = n$ genau dann, wenn n Primzahl ist.

Nun zum eigentlichen Beweis:

Zu den endlich vielen Primzahlen p_j ($1 \leq j \leq n$) bilden wir die Zahl

$$q = p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

Da $q > 1$, existiert nach A3 kleinster Teiler $k > 1$, der Primzahl ist. Es ist also $k = p_j$ für ein j mit $1 \leq j \leq n$.
 $k = p_j$ teilt also q und das Produkt $\prod_{i=1}^n p_i$. Wegen

$$1 = q - \prod_{i=1}^n p_i$$

würde nach A3 k auch 1 teilen, was wegen $k = p_j > 1$ unmöglich ist. Damit ist k eine neue Primzahl im Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 2.2:

Wir bereiten die Aufgabe, $\sqrt[3]{7}$ zu berechnen, zur Anwendung der Intervallhalbierung auf:

$\sqrt[3]{7}$ ist Nullstelle der stetigen Funktion $f(x) = x^3 - 7$, für die

$$f(-2) \cdot f(2) = (-15) \cdot 1 < 0.$$

gilt.

Das Verfahren der Intervallhalbierung kann also starten.
Am Ende erhält man $\sqrt[3]{7} = 1,912 \dots$

Aufgabe 2.3:

Beachten Sie: Die Verneinung einer Aussage A ist diejenige Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist, und genau dann falsch ist, wenn A wahr ist.

- a) Es gibt ein Haus, das keine Fenster hat.
- b) Es gibt keinen roten Hund, der fliegen kann.
- c) Es regnet und es gibt jemanden, der nicht nass wird.
- d) Entweder es ist Freitag, der 13., oder ich habe immer Pech.

Aufgabe 2.4:

a)	A	B	$A \vee B$	$\neg A \vee B$	$\neg A \rightarrow B$	$\neg A \wedge \neg B$
	1	1	1	0	0	0
	1	0	1	0	0	0
	0	1	1	0	1	0
	0	0	0	1	1	1

Hier liegt eine Tautologie vor.

b) Genauso zeigt man, daß in diesem Fall keine Tautologie vorliegt.

Aufgabe 2.5:

$$a) f: \Pi_1 = \{2, 4, 7\} \rightarrow \Pi_2 = \{2, 4, 8, 9\}$$

Injective Abbildung: $f(2) = 2, f(4) = 4, f(7) = 8$

Nicht injective Abb.: $f(2) = f(4) = 2, f(7) = 9$

Surjektive und damit bijektive Abbildungen existieren nicht, da Π_2 mehr Elemente besitzt als Π_1 .

$$g: M_2 \rightarrow M_1$$

Es gibt keine injektive Abbildung

$g(2) = g(4) = g(8) = 7, g(9) = 2$ ist eine nicht injektive Abbildung, die ~~aber~~ nicht surjektiv ist.

g mit $g(2) = g(4) = 2, g(8) = 4, g(9) = 7$ ist dagegen surjektiv.

$$b) M = \{1, 2\}$$

$$M \times M = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Es gibt zwei Äquivalenzrelationen, nämlich

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2)\},$$

$$R_2 = M \times M.$$

[Die Elemente $(1, 1), (2, 2)$ müssen wegen Definition

6.1 (i) (Skript) enthalten sein. Sind weitere Elemente enthalten, dann müssen nach Def. 6.1

(ii), (iii) alle Elemente aus $M \times M$ enthalten sein.