Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1

Es gilt:

$x \vee y \iff (x \text{ NAND } x) \text{ NAND } (y \text{ NAND } y)$

$x \Rightarrow y \iff x \text{ NAND } (y \text{ NAND } y)$

Denn:

x	y	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	x NAND x	y NAND y	(x NAND x) NAND (y NAND y)	x NAND (y NAND y)
1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1

Aufgabe 3.2

a)

$n=1: \sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1 = 1^2$.

$n \to n+1$: IV: $\exists n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

Dann gilt: $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1)-1 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2n+1$

$$\overset{IV}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 .$$

Also gilt $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

b)

$n=1: \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

$n \to n+1$:

IV: $\exists n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dann gilt: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n+1$

$$\overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} .$$

Also gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

c)

$n=1: \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$.

$n \to n+1$: IV: $\exists n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Dann gilt: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$\overset{IV}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 + \frac{1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)+1} .$$

Also gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Aufgabe 3.3

a)

Sei $q \neq 1$.

$n=1$: $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$.

$n \to n+1$:

IV: $\exists n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Dann gilt: $\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n$

$$\overset{IV}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n$$

$$= \frac{1-q^n+q^n(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Also gilt $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für $q \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

b)

1. Fall: $a \neq b \wedge b \neq 0$:

$$(b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (b-a)\, b^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

mit $q = \frac{a}{b} \neq 1 \to$ a)

$$= (b-a)\, b^{n-1} \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^n}{1-\left(\frac{a}{b}\right)} = (b-a)\, b^{n-1} \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\frac{b-a}{b}}$$

$$= b^n - a^n.$$

2. Fall: $a \neq b \wedge b = 0$:

$$(b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = -a\left(\sum_{k=0}^{n-2} a^k \cdot 0 + a^{n-1} \cdot 1\right) = -a^n = b^n - a^n.$$

3. Fall: $a = b$:

$$(b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = 0 = b^n - a^n.$$

$\square$

Aufgabe 3.4

"$\Rightarrow$": (direkt)

n gerade $\vee$ m gerade $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 2k \vee m = 2k$

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}: nm = 2r$

$\Rightarrow nm$ gerade

"$\Leftarrow$": (indirekt)

Annahme: n ungerade $\wedge$ m ungerade

$\Rightarrow \exists k, r \in \mathbb{N}: n = 2k-1 \wedge m = 2r-1$

$\Rightarrow nm = (2k-1)(2r-1) = 2(\underbrace{2kr-k-r}_{\in \mathbb{N}})+1$

$\Rightarrow nm$ ungerade

$\square$

Aufgabe 3.5

Wir verwenden:

$\forall n \in \mathbb{N}: 3 | n \Leftrightarrow 3 | n^2 \quad (*)$.

(Das gilt wegen Satz 7.7 und Bemerkung 7.8 (Skript).)

Annahme: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}: ggT(n,m) = 1 \wedge \sqrt{3} = \frac{n}{m}$

$\Rightarrow 3m^2 = n^2$

$\Rightarrow 3 | n^2$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} 3 | n$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 3k$

$\Rightarrow 3m^2 = 9k^2$

$\Rightarrow m^2 = 3k^2$

$\Rightarrow 3 | m^2$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} 3 | m$

$3|n \wedge 3|m$ ist Widerspruch zu $ggT(n,m) = 1$.

Die Annahme $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ ist also falsch.

Für $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$ darf der Beweis natürlich nicht funktionieren.
Die Argumentationskette funktioniert deshalb nicht, weil aus $4 | n^2$ nicht immer $4 | n$ folgt (nur, wenn auch $16 | n^2$ gilt).