Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1

a) $\overline{\left(\frac{2+i}{1-i}\right)} = \overline{\left(\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)} = \overline{\left(\frac{2+i+2i+i^2}{1-i^2}\right)} = \overline{\left(\frac{2+3i-1}{1+1}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

$\operatorname{Re}\left(z_1 := \overline{\left(\frac{2+i}{1-i}\right)}\right) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z_1 = -\frac{3}{2}$

b) $z_2 := \frac{(1+e^{i\frac{\pi}{2}})(1-e^{i\frac{\pi}{2}})}{3+4i} = \frac{1-e^{i\pi}}{3+4i} = \frac{1-(-1)}{3+4i} = \frac{2(3-4i)}{9+16} = \frac{6}{25} - \frac{8}{25}i$

$\operatorname{Re} z_2 = \frac{6}{25}$, $\operatorname{Im} z_2 = -\frac{8}{25}$

c) $z_3 := (1+i)\overline{(3+i)}(2-i)^2 = (1+i)(3-i)(4-4i-1) = (4+2i)(3-4i) = 20-10i$

$\operatorname{Re} z_3 = 20$, $\operatorname{Im} z_3 = -10$

d) $z_4 := \frac{3}{2}i + \frac{3-i}{(1+i)^2} = \frac{3}{2}i + \frac{3-i}{1+2i-1} = \frac{3}{2}i + \frac{(3-i)(-2i)}{4} = \frac{3}{2}i + \frac{-2-6i}{4} = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{Re} z_4 = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z_4 = 0$

e) $z_5 := \frac{2+i}{3-i} + \frac{3i}{5+2i} = \frac{(2+i)(3+i)}{10} + \frac{3i(5-2i)}{29} = \frac{5+5i}{10} + \frac{6+15i}{29} = \frac{1+i}{2} + \frac{6+15i}{29}$

$= \frac{29+29i+12+30i}{58} = \frac{41}{58} + \frac{59}{58}i$

$\operatorname{Re} z_5 = \frac{41}{58}$, $\operatorname{Im} z_5 = \frac{59}{58}$

f) $z_6 := \left(\frac{i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{i(1+i)}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(-1+i)^3 = \frac{1}{8}\left((-1)^3 + 3(-1)^2 + 3i^2(-1) + i^3\right)$

$= \frac{1}{8}(-1+3i+3-i) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

$\operatorname{Re} z_6 = \frac{1}{4}$, $\operatorname{Im} z_6 = \frac{1}{4}$

Aufgabe 5.2

a)

Die geometrische Summenformel (siehe Aufgabe 3.3 a)) gilt auch in $\mathbb{C}$, da $\mathbb{C}$ Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ ist. Somit:

$$z_1 := \sum_{k=1}^{7} (1+i)^k = \left(\sum_{k=0}^{7} (1+i)^k\right) - 1 \overset{\text{g.Sf.}}{=} \frac{1-(1+i)^8}{1-(1+i)} - 1 = \frac{1-(1+i)^8}{-i} + \frac{i}{-i}$$

$$= \frac{(1+i)-(1+i)^8}{-i} = i\left((1+i)-(1+i)^8\right)$$

$|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1+i)^8 = 16\, e^{2\pi i} = 16$

Also: $z_1 = i(1+i-16) = -1-15i$

$\mathrm{Re}\, z_1 = -1$, $\mathrm{Im}\, z_1 = -15$, $|z_1| = \sqrt{1+225} = \sqrt{226}$,

$\arg(z_1) = \pi + \arctan\left(\frac{-15}{-1}\right) = \pi + \arctan 15$.

b)

$|1-\sqrt{3}i| = 2$, $\arg(1-\sqrt{3}i) = 2\pi + \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{5}{3}\pi$

$\Rightarrow z_2 := (1-\sqrt{3}i)^{42} = \left(2e^{i\frac{5}{3}\pi}\right)^{42} = 2^{42} e^{70\pi i} = 2^{42}$

$\mathrm{Re}\, z_2 = 2^{42}$, $\mathrm{Im}\, z_2 = 0$, $|z_2| = 2^{42}$, $\arg(z_2) = 0$

c)

$z_3 := \left(\frac{2i}{1-i}\right)^9 = (i(1+i))^9 = (-1+i)^9$

$|-1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1+i) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3}{4}\pi$

$\Rightarrow -1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi} \Rightarrow (-1+i)^9 = (-1+i)^8(-1+i) = 2^4 e^{i6\pi}(-1+i)$

$= 16(-1+i) = -16+16i$

$\mathrm{Re}\, z_3 = -16$, $\mathrm{Im}\, z_3 = 16$, $|z_3| = 16\sqrt{2}$, $\arg(z_3) = \arg(-1+i) = \frac{3}{4}\pi$

d)

$$z_4 := \left(\frac{i}{1+i}\right)^{15} = \left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{15} = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{15} \overset{a)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{15} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{16} \left(\frac{1+i}{2}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{16}(1-i) = 2^{-8}(1-i) = \frac{1}{256}(1-i)$$

$\mathrm{Re}\, z_4 = 2^{-8} = \frac{1}{256}$, $\mathrm{Im}\, z_4 = -2^{-8} = \frac{1}{256}$, $|z_4| = 2^{-\frac{15}{2}} = \frac{1}{128\sqrt{2}}$, $\arg(z_4) = \frac{7}{4}\pi$

Aufgabe 5.3

a)

$|z^4| = \sqrt{4+12} = 4$, $\arg(z^4) = \pi + \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) = \pi + \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi$

$\Rightarrow z^4 = 4\, e^{i\left(\frac{2}{3}+2k\right)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z_k = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{1}{6}+\frac{k}{2}\right)\pi}$, $k = 0, 1, 2, 3$

$\Leftrightarrow z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i$

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\, i$

$z_2 = -z_0$

$z_3 = -z_1$

b)

$z_{1/2} = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{4-8}\right) = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{-4}\right) = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$

---

c)

$z^4 - 2z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (z^2)^2 - 2z^2 + 2 = 0$

Nach b) gilt

$z^2 = 1+i \lor z^2 = 1-i$

$\Leftrightarrow z^2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \lor z^2 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z = \pm \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}} \lor z = \pm \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{8}}$

$\Leftrightarrow z_0 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}} \lor z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{7\pi}{8}}$

$\lor z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{9\pi}{8}} \lor z_3 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{15\pi}{8}}$

5.3 d)

$a := \operatorname{Re} z$, $b := \operatorname{Im} z$

$\bar{z} = 4z^3 \iff a - ib = 4(a^3 + i\,3a^2b - 3ab^2 - ib^3) = 4a(a^2 - 3b^2) + i\,4b(3a^2 - b^2)$

$\iff a = 4a(a^2 - 3b^2) \;\wedge\; b = -4b(3a^2 - b^2)$

1. Fall : $a = 0$

$\Rightarrow b = 4b^3 \iff b = 0 \vee b^2 = \frac{1}{4} \iff b = 0 \vee b = \frac{1}{2} \vee b = -\frac{1}{2}$

2. Fall : $b = 0$

$\Rightarrow a = 4a^3 \iff a = 0 \vee a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$

3. Fall : $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

$\Rightarrow a^2 - 3b^2 = \frac{1}{4} \;\wedge\; 3a^2 - b^2 = -\frac{1}{4}$

$\iff a^2 - 3b^2 = \frac{1}{4} \;\wedge\; 4(a^2 - b^2) = 0$

$\iff a^2 = b^2 \;\wedge\; b^2 = -\frac{1}{8}$ nicht möglich

Somit

$\bar{z} = 4z^3 \iff z = 0 \vee z = \pm\frac{1}{2} \vee z = \pm\frac{1}{2}i$

e)

$z_{1/2} = \frac{1}{2}\left((4-8i) \pm \sqrt{(4-8i)^2 + 4(7+4i)}\right) = 2-4i \pm \sqrt{(2-4i)^2 + 7 + 4i}$

$= 2 - 4i \pm \sqrt{-12 - 16i + 7 + 4i} = 2 - 4i \pm \sqrt{-5 - 12i}$

f)

$\bar{z}^2 - 2\bar{z} - i = 0$

$\iff \bar{z}_{1/2} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4+4i}) = 1 \pm \sqrt{1+i} \overset{5.2\,a)}{=} 1 \pm (\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$

$\iff z_{1/2} = 1 \pm \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{8}} = 1 \pm \sqrt[4]{2} \cos\frac{\pi}{8} \mp i \sqrt[4]{2} \sin\frac{\pi}{8}$

5.3 g)

$$z^3 = \frac{16+4i}{3+5i} = \frac{4(4+i)(3-5i)}{34} = 2(1-i) \overset{d)}{=} 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7}{4}\pi}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{7}{12} + \frac{8k}{12}\right)\pi} \quad , k = 0, 1, 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7}{12}\pi} \quad \vee \quad z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi} \quad \vee \quad z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{23}{12}\pi}$$

$$= -1-i$$

h)

$$z - 4 = (3-2z)i \Longleftrightarrow (1+2i)z = 4+3i \Longleftrightarrow z = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{5} = 2-i$$

i)

$$w := z - \sqrt{2}(1+i)$$

$$\Longrightarrow w^3 = -8 \Longleftrightarrow w = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k}{3}\pi\right)} \quad , k = 0, 1, 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad w = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \vee \quad w = -2 \quad \vee \quad w = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

$$= 1+\sqrt{3}\, i \qquad\qquad = 1-\sqrt{3}\, i$$

Also $z = (1+\sqrt{2}) + i(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \quad \vee \quad z = (-2+\sqrt{2}) + i\sqrt{2}$

$\vee \quad z = (1+\sqrt{2}) + i\left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

5.3 j)

Man errät, dass -1 eine Nullstelle von z^3-z^2+2 ist.

Polynomdivision liefert dann

$$
\begin{array}{l}
(z^3-z^2+2):(z+1)=z^2-2z+2 \\
\underline{-(z^3+z^2)\qquad} \\
\qquad -2z^2+2 \\
\qquad \underline{-(-2z^2-2z)} \\
\qquad\qquad 2z+2 \\
\qquad\qquad \underline{-(2z+2)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

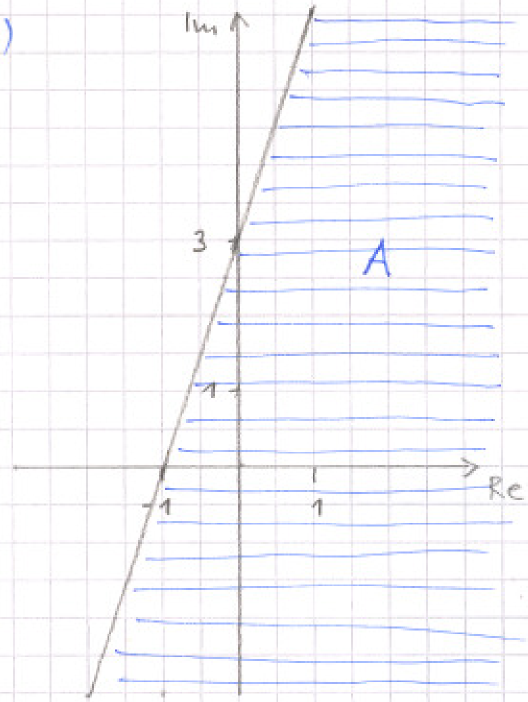
Also $z^3-z^2+2=0 \iff (z+1)(z^2-2z+2)=0$

$\iff z=-1 \vee z^2-2z+2=0$

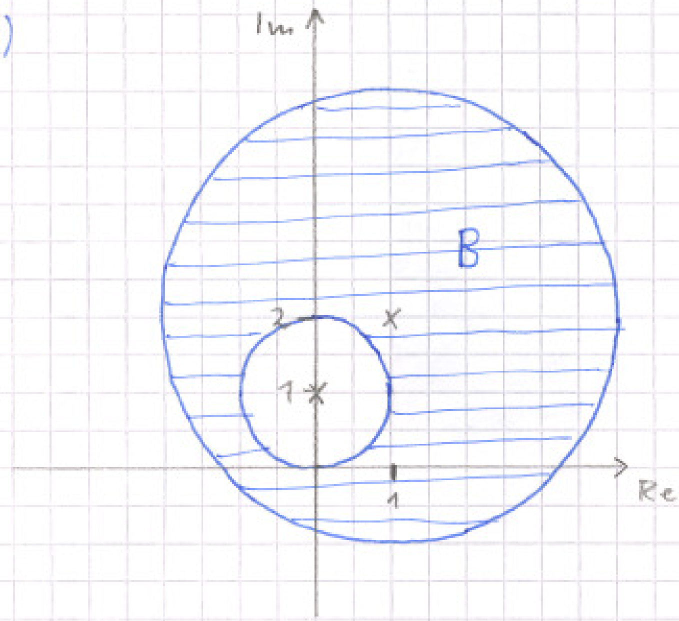
$\overset{5.3b)}{\iff} z=-1 \vee z=1+i \vee z=1-i$

Aufgabe 5.4

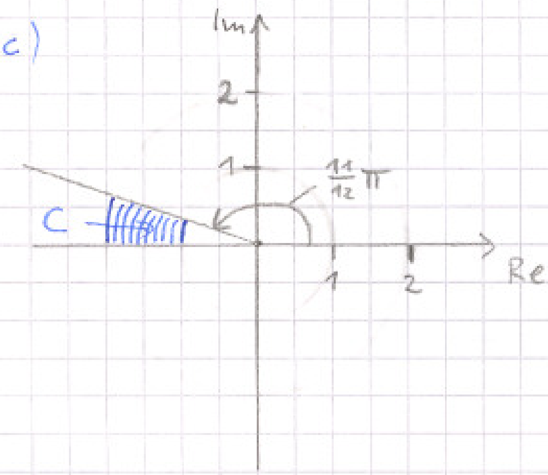
a)



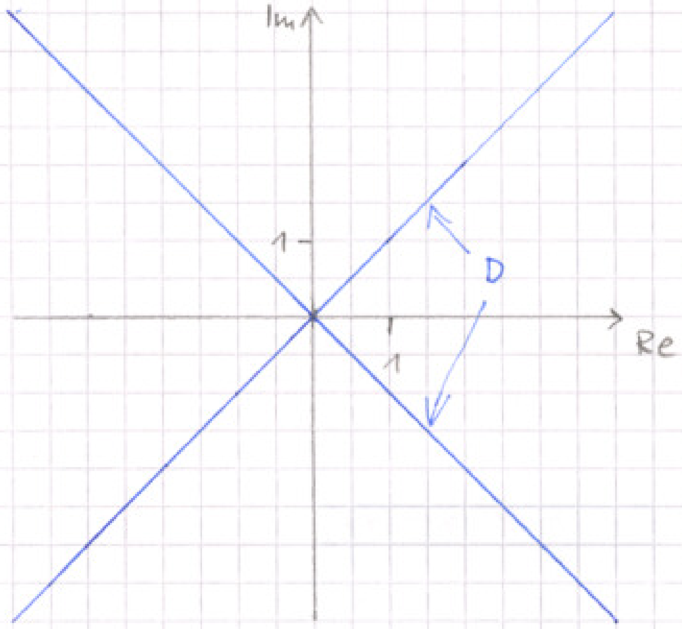
b)



c)



5.4 d)



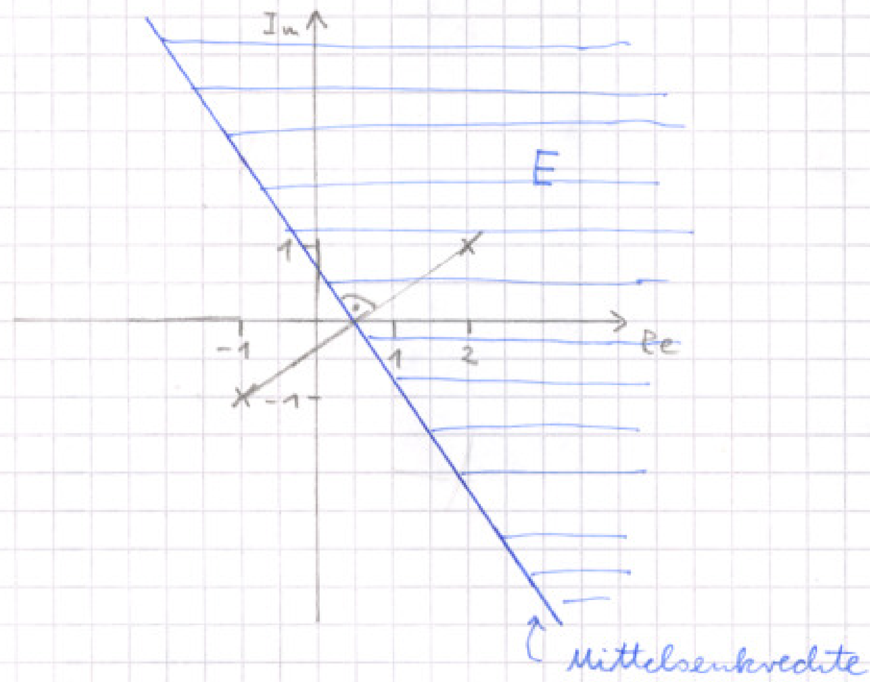
$z := x + iy$

$\Rightarrow \operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$

Also

$\operatorname{Re} z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2$

e)



Aufgabe 5.5

a)

Verschiebung um 3 nach rechts und um -1 nach unten

b)

Drehung um 90°

c)

$-1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Also Drehstreckung mit Streckfaktor $\sqrt{2}$ und

Drehwinkel 135°

d)

Punktspiegelung am Ursprung

e)

Achsenspiegelung an der reellen Achse

f)

Achsenspiegelung an der imaginären Achse

g)

Verkettung von Achsenspiegelung an der reellen

Achse und zentrischer Streckung mit

Streckfaktor 3

Aufgabe **5.6**

a)

Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ liefert

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \iff \lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{-16}) = -1 \pm 2i$

Somit ist die allgemeine Lösung (gemeint ist hier die allgemeine reelle Lösung)

$$y_h(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{c}_1 e^{(-1+2i)t} + \tilde{c}_2 e^{(-1-2i)t}\right], \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{C},$$

$$= c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$

$$y_h'(t) = -c_1 e^{-t} \cos 2t - 2c_1 e^{-t} \sin 2t - c_2 e^{-t} \sin 2t + 2c_2 e^{-t} \cos 2t$$

$$= (2c_2 - c_1) e^{-t} \cos 2t - (2c_1 + c_2) e^{-t} \sin 2t$$

$y'(0) = 0 \Rightarrow 2c_2 = c_1$

Somit $y(t) = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$.

(gedämpfte Schwingung)

b)

Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ liefert

$\lambda^3 + 4\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 + 4) = 0 \iff \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$y_h(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 e^{2it} + \tilde{c}_3 e^{-2it}\right], \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3 \in \mathbb{C}$$

$$= c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

5.6 c)

Ansatz $y_h(t) = e^{\lambda t}$ zur Lösung der homogenen Gleichung liefert

$$\lambda^4 + 1 = 0 \iff \lambda^4 = -1$$

$$\iff \lambda_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\lambda_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$\lambda_2 = e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\lambda_3 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

Wegen $\cos x = \cos(-x)$ und $\sin x = -\sin(-x)$ ergibt sich als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) + c_2 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) + c_3 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) + c_4 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right).$$

Ansatz für die partikuläre Lösung:

$y_p(t) = c e^{-t}$ (-1 ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms)

$$\Rightarrow y_p''''(t) = (-1)^4 c e^{-t} = c e^{-t}.$$

Einsetzen in die Dgl. liefert

$$e^{-t}(c+c) = e^{-t} \iff c = \frac{1}{2}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + y_h(t).$$

.6 d)

nsatz $y_h(t) = e^{\lambda t}$ zur Lösung d. homogenen Gleichung liefert

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \iff \lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{-16}) = 1 \pm 2i$

Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{c}_1 e^{(1+2i)t} + \tilde{c}_2 e^{(1-2i)t}\right] \quad , \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{C}$$
$$= c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ansatz für die partikuläre Lösung

$y_p(t) = c t e^{(1+2i)t}$ [$e^t \cos 2t = \mathrm{Re}\, e^{(1+2i)t}$ und $(1+2i)$ ist einfache Nullstelle d. charakteristischen Polynoms]

$$\Rightarrow y_p'(t) = c\,(1 + (1+2i)t)\, e^{(1+2i)t}$$
$$y_p''(t) = c\,((1+2i)^2 t + 2(1+2i))\, e^{(1+2i)t}$$

Einsetzen in die Dgl. (komplexifiziert) liefert

$$c e^{(1+2i)t} \cdot \left(\underline{(1+2i)^2 t} + 2(1+2i) - 2 \underline{- 2(1+2i)t} \underline{+ 5(1+2i)} \right) = -2 e^{(1+2i)t}$$
$$= 0$$

$$\iff c = \frac{-1}{1+2i-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{i} = \frac{1}{2} i$$

Also $y_p(t) = \frac{1}{2} i t e^{(1+2i)t} = \left(-\frac{1}{2} \sin 2t + i \frac{1}{2} \cos 2t\right) t e^t$

Somit ist die allgemeine (reelle) Lösung:

$$y(t) = -\frac{1}{2} t e^t \sin 2t + y_h(t)$$

5.6 e)

Ansatz $y_h(t) = e^{\lambda t}$ zur Lösung der homogenen Gleichung liefert

$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 5 = 0 \overset{1)}{\Longleftrightarrow} \lambda_1 = \sqrt{1+2i}, \lambda_2 = -\sqrt{1+2i}, \lambda_3 = \sqrt{1-2i}, \lambda_4 = -\sqrt{1-2i}$

Somit ist die allgemeine Lös. d. homog. Gleichung

$y_h(t) = \mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4} \tilde{c}_j e^{\lambda_j t}\right], \quad \tilde{c}_j \in \mathbb{C}$

Ansatz für die partikuläre Lösung

$y_p(t) = c e^{it}$ $[\cos t = \mathrm{Re}\, e^{it}$ und $i \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}]$

Einsetzen in die (komplexifizierte) Dgl. liefert

$c e^{it}(1 + 2 + 5) = e^{it} \Longleftrightarrow c = \frac{1}{8}$

Also $y_p(t) = \frac{1}{8}(\cos t + i \sin t)$

Somit ist die allgemeine (reelle) Lösung:

$y(t) = \frac{1}{8}\cos t + y_h(t)$.

f)

Ansatz $y_h(t) = e^{\lambda t}$ zur Lösung der homogenen Gleichung liefert

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda+1)^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -1$ (doppelte Nullstelle

Somit ist die allg. Lös. d. homog. Gleichung

$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

Ansatz für die partikuläre Lösung

$y_p(t) = at^2 + bt + c \Rightarrow y_p'(t) = 2at + b, \quad y_p''(t) = 2a$

Einsetzen in die Dgl. liefert

$2a + 4at + 2b + at^2 + bt + c = t^2 \Longleftrightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4a = -4 \\ c = -2a - 2b = 6 \end{array}$

Also: $y_p(t) = t^2 - 4t + 6$

Somit ist die allg. Lös.: $y_a(t) = t^2 - 4t + 6 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

$\Rightarrow y_a'(t) = 2t - 4 + (c_2 - c_1)e^{-t} - c_2 t e^{-t}$

$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -6 \\ y'(0) = 1 \Rightarrow c_2 - c_1 - 4 = 1 \\ \Longleftrightarrow c_2 = -1 \end{array}\right\}$ Also: $y(t) = t^2 - 4t + 6 - 6e^{-t} - te^{-t}$

5.6 g)

Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ liefert

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$

Man errät, dass $\lambda = 2$ Nullstelle ist $\Big[\overbrace{2 \text{ teilt } 10}^{\text{das funktioniert allerdings nicht bei allen Polynomen}}\Big]$

Polynomdivision liefert nun

$$
\begin{array}{l}
(\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda - 10) : (\lambda - 2) = \lambda^2 + 4\lambda + 5 \\
\underline{-(\lambda^3 - 2\lambda^2)} \\
\quad 4\lambda^2 - 3\lambda \\
\quad \underline{-(4\lambda^2 - 8\lambda)} \\
\qquad 5\lambda - 10 \\
\qquad \underline{(5\lambda - 10)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Also $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \iff (\lambda - 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) = 0$

$$\iff \lambda = 2 \;\vee\; \lambda = \tfrac{1}{2}\left(-4 \pm \sqrt{16 - 20}\right)$$

$$= -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

allgemeine Lösung: $y(t) = \operatorname{Re}\left[\tilde{c}_1 e^{2t} + \tilde{c}_2 e^{(-2+i)t} + \tilde{c}_3 e^{(-2-i)t}\right]$, $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3 \in \mathbb{C}$

$$= c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \cos t + c_3 e^{-2t} \sin t,$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

h)

Ansatz $y_h(t) = e^{\lambda t}$ zur Lösung d. hom. Gl. liefert

$\lambda^3 = 1 \iff \lambda = 1 \;\vee\; \lambda = e^{\frac{2}{3}\pi i} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,i) \;\vee\; \lambda = e^{\frac{4}{3}\pi i} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\,i)$

Somit ist die allg. Lös. der hom. Gl.:

$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right) + c_3 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right)$

Ansatz für die partikuläre Lösung

$y_p(t) = (at + b)\,t\,e^t$ [1 ist einfache Nullst. d. char. Polynoms]

$\Rightarrow y_p'(t) = (at^2 + bt)e^t + (2at + b)e^t = (at^2 + (2a+b)t + b)e^t$

$y_p''(t) = (at^2 + (4a+b)t + (2a + 2b))e^t$

$y_p'''(t) = (at^2 + (6a+b)t + (6a + 3b))e^t$

Einsetzen in die Dgl.:

$e^t\left(at^2 + (6a+b)t + (6a+3b) - (at^2 + bt)\right) = t e^t \iff 6a = 1 \;\wedge\; 6a + 3b = 0$

$\iff a = \frac{1}{6},\; b = -\frac{1}{3}$

Also $y_p(t) = \left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{3}t\right)e^t$

Somit ist die allg. Lös.: $y(t) = \left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{3}t\right)e^t + y_h(t)$.