Höhere Mathematik I
Elektrotechnik und Informationstechnik,
Geodäsie, Physik
Wintersemester 2005/2006

Mathematisches Institut I
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. Guido Schneider
Dr. Wolf-Patrick Düll
18. November 2005

Übungen

Aufgabe 6.1 Der harmonische Oszillator erfüllt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$my'' + ry' + ky = 0\,,$$

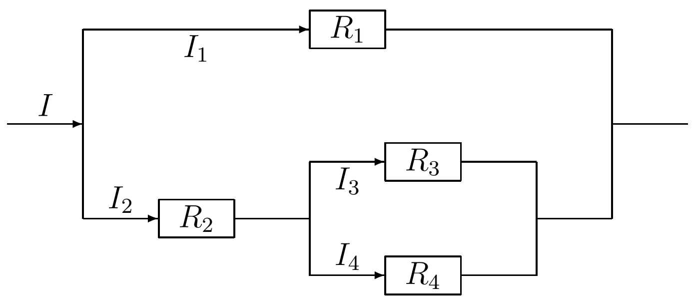
wobei $k, m > 0$ und $r \geq 0$ ist. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von den Parametern r, m und k. Skizzieren Sie typische Lösungen.

Aufgabe 6.2 Die Stromstärke I in einem Wechselstromkreis mit der Wechselspannung $U = U_0 \cos \omega t$ und einer Spule der Induktivität $L > 0$, einem Kodensator der Kapazität $C > 0$ und einem Ohmschen Widerstand $R \geq 0$ in Reihenschaltung erfüllt die Differentialgleichung

$$LI'' + RI' + C^{-1}I = U'\,.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von den Parametern U_0, ω, L, C und R. Skizzieren Sie typische Lösungen.
b) Skizzieren Sie die Abhängigkeit der maximalen Stromstärke von der Frequenz ω bei festen L, C, R und U_0.

Aufgabe 6.3 Gegeben ist die folgende Gleichstromschaltung:



Es gelte $I = 1$ und $R_1 = R_2 = R_3 = \alpha$ sowie $R_4 = \beta$.

1. Stellen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze ein lineares Gleichungssystem für die Ströme I_1 bis I_4 auf.

2. Bestimmen Sie (für beliebige Konstanten α und β) alle Lösungen, und machen Sie sich klar, dass das Gleichungssystem für alle physikalisch sinnvollen Werte der Konstanten eindeutig lösbar ist.

– bitte wenden –

Aufgabe 6.4 Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\ x_1 + (\alpha-1)x_2 + (\beta+2)x_3 &= 3 \end{aligned}$$

und entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob das Gleichungssystem lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 6.5 Die Punkte $A = (2, -1, 3)$, $B = (0, 7, 1)$ und $C = (3, 1, 1)$ seien die Eckpunkte eines Dreiecks in $\mathbb{R}^3$.
a) Berechnen Sie die Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC und den Innenwinkel bei A. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Winkelhalbierenden dieses Winkels an. Geben Sie auch eine Parameterdarstellung der Seitenhalbierenden der Seite BC an.
b) Bestimmen Sie die Punkte Q und R auf der Geraden durch A und C, so dass das Dreieck ΔABQ gleichschenklig mit Basis BQ ist und das Dreieck ΔABR einen rechten Winkel bei B besitzt.
c) Sei E die Ebene, in der das Dreieck ΔABC liegt. Geben Sie von E eine Parameterdarstellung und die Hessesche Normalenform an. Zeigen Sie, dass der Punkt $P = (0, 0, 1)$ nicht in der Ebene E liegt.
d) Sei die Ebene F beschrieben durch $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$. Geben Sie eine Parameterdarstellung von F an. Überprüfen Sie, ob $F \perp E$ ist.

Aufgabe 6.6 Gegeben sei in $\mathbb{R}^3$ die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

sowie die Punkte $A = (3, 6, -9)$, $B = (3, 4, -2)$ und $C = (4, 2, -3)$.
a) Sei E die Ebene, die g und B enthält. Berechnen Sie den Abstand des Punktes C von E und die Koordinaten des Spiegelpunktes C' von C an E. Liegt C oder C' auf derselben Seite von E wie der Ursprung? Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen der Lotgeraden von C auf E und der Geraden h, welche durch A und C gehe.
b) Welche Punkte auf h haben den Abstand 2 zu E?
c) Sei F eine Ebene, die senkrecht zu h ist und die Strecke BC im Verhältnis $2 : 1$ teilt. Geben Sie die Hessesche Normalenform von F an.
d) Gegeben sei ein Parallelogramm, das den Punkt A als Eckpunkt, die Strecke AB als Seite und eine weitere Seite auf g hat. Bestimmen Sie die Innenwinkel des Parallelogramms.

Hörsaalübung am **29.11.05**: **Aufgaben 6.1, 6.2, 6.3**,

Tutorien in der Woche **5.–9.12.05**: **Aufgaben 6.4, 6.5, 6.6**.