Mathematisches Institut I
Universität Karlsruhe
Prof. Dr. Guido Schneider
Dr. Wolf-Patrick Düll
30. November 2005

Übungen

Aufgabe 7.1 Gegeben seien die Punkte $P_1 = (2, 0, 2)$, $P_2 = (1, 4, 3)$, $Q = (3, 2, 1)$, $R = (2, 3, 3)$ und der Vektor $\mathbf{a} = (-1, 1, 1)^T$.
a) Zeigen Sie, dass sich die durch P_1 und P_2 gehende Gerade g_1 und die durch Q gehende Gerade g_2 mit Richtungsvektor $\mathbf{a}$ schneiden. Geben Sie den Schnittpunkt an.
b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, die durch g_1 und g_2 aufgespannt wird.
c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes R von g_1.
d) Zeigen Sie, dass die Punkte P_1, P_2 und Q die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks D sind (rechter Winkel bei Q). Berechnen Sie den Flächeninhalt von D.

Aufgabe 7.2 Gegeben seien drei Ebenen im $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 : -y + z - 2 = 0, \quad E_2 : 3x + y + 2z - 1 = 0,$$

$$E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

und die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie $S = E_1 \cap E_2 \cap E_3$.
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P von g und E_3. Bestimmen Sie alle in E_3 liegenden Geraden, die g im Punkt P unter dem Winkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$ schneiden.
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes von P auf E_1.

Aufgabe 7.3 Im $\mathbb{R}^3$ sind die zwei Geraden g und h gegeben durch

$$g \ : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \ : \ \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Geraden *windschief* sind.
b) Es sei E die Ebene, die g enthält und zu h parallel ist. Geben Sie die Hessesche Normalform von E an. Welchen Abstand hat die Gerade h von E?
c) Es sei P der Punkt auf h, der von g den geringsten Abstand hat. Bestimmen Sie seine Koordinaten.

– bitte wenden –

Aufgabe 7.4 Beweisen Sie folgende elementargeometrische Sätze:
a) Satz des Thales: Der geometrische Ort der Scheitelpunkte C_i aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte A und B gehen, ist der Kreis über der Strecke $[A, B]$ als Durchmesser.
b) Höhensatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe auf der Hypotenuse flächengleich mit dem Rechteck aus den Längen der Hypotenusenabschnitte.

Aufgabe 7.5 Im Vektorraum V sind die Vektoren a_1, a_2, a_3 linear unabhängig. Die Vektoren b_1, b_2, b_3 werden definiert durch

$$b_1 := (\alpha - 1)a_2 + 2a_3\,, \quad b_2 := 2a_1 + (2\alpha - 3)a_2 + 4a_3\,, \quad b_3 := a_1 + (\alpha - 1)a_2 + a_3\,.$$

a) Für welche α sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 linear unabhängig?
b) Nun sei $\alpha = 0$. Für welche β lässt sich der Vektor $x := a_1 + \beta a_2 + 2a_3$ mittels der Vektoren b_1, b_2 und b_3 darstellen?
c) Für welche Werte k liegen die Punkte $A = (0, -1, 2),\ B = (2, -3, 4),\ C = (1, -1, 1)$ und $D = (1, k, 2)$ in einer Ebene?
d) Stellen Sie im Fall $\alpha \neq 0$ die a_j durch die b_k dar.
e) Stellen Sie das Polynom $(x + 1)^2$ als Linearkombination der Polynome $2x^2 + x,\ 4x^2 + x + 2$ und $x^2 + x + 1$ dar. (Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von d).)

Aufgabe 7.6 Sei $U = Spann\,((0, 0, 1)^T, (1, 1, 0)^T)$ und $W = Spann\,((0, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T)$.
a) Bestimmen Sie $U \cap W$. Ist $U \cap W$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$?
b) Welche geometrischen Objekte beschreiben U, W und $U \cap W$.
c) Sei A eine 4×3 – Matrix, deren Zeilenvektoren die oben angegebenen Basen von U und W sind. Welchen Rang hat A?
d) Zeigen Sie, dass der Schnitt zweier Unterräume eines Vektorraumes V wieder ein Unterraum von V ist. Gilt eine analoge Aussage auch für affine Räume?

Aufgabe 7.7 Gegeben seien die Polynome $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ und $p_3(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Definiere das Skalarprodukt $< f, g > = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.
a) Zeigen Sie, dass p_1, p_2 und p_3 jeweils senkrecht aufeinander stehen.
b) Bestimmen Sie $\|p_1\|, \|p_2\|$ und $\|p_3\|$, wobei $\|p\| = \sqrt{< p, p >}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm ist.

Hörsaalübung am **6.12.05**: **Aufgaben 7.1, 7.2, 7.3**,

Tutorien in der Woche **12.–16.12.05**: **Aufgaben 7.4, 7.5, 7.6, 7.7** .