Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1

a)

Aufstellen von Gleichungen für g_1 und g_2:

$$g_1: \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$g_2: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Gleichsetzen der beiden Geraden liefert

$$\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \lambda = 1, \mu = 2$$

Somit $g_1 \cap g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

b)

$$\vec{n} = \pm \left(\overrightarrow{P_1P_2} \times a \right) = \pm \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \pm \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n_0} = \pm \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das richtige Vorzeichen für den zur HNF gehörenden Normaleneinheitsvektor von E erhalten wir aus

$$\left\langle \vec{n_0}_{HNF}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0$$

(Beachte: Der Schnittpunkt von g_1 und g_2 muss natürlich in E liegen.)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}$$

Somit $\vec{n_0}_{HNF} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

HNF von E: $\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_3 - 2\sqrt{2} = 0$.

7.1 c)

Sei L der Lotfußpunkt von R auf g_1. Dann existiert ein $\lambda_L \in \mathbb{R}$ mit

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2-\lambda_L \\ 4\lambda_L \\ 2+\lambda_L \end{pmatrix}$$

und der Abstand von R zu g_1 ist gleich $\|\overrightarrow{RL}\|$.

Außerdem muss gelten

$$\overrightarrow{RL} \perp g_1 \iff \overrightarrow{RL} \perp \overrightarrow{P_1P_2} \iff \langle \overrightarrow{RL}, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2-\lambda_L-2 \\ 4\lambda_L-3 \\ 2+\lambda_L-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_L \\ 4\lambda_L-3 \\ \lambda_L-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 18\lambda_L - 13 = 0 \iff \lambda_L = \frac{13}{18}$$

Also $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2-\frac{13}{18} \\ \frac{52}{18} \\ 2+\frac{13}{18} \end{pmatrix}$ und

$$d(R, g_1) = \|\overrightarrow{RL}\| = \sqrt{18\left(\tfrac{13}{18}\right)^2 + 10} = \sqrt{10 + \tfrac{169}{18}}.$$

d)

Es ist zu zeigen

$$\langle \overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2} \rangle = 0.$$

$$\langle \overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2} \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$$

somit hat D einen rechten Winkel bei Q und der Flächeninhalt von D ist daher gleich $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{QP_1}\|\,\|\overrightarrow{QP_2}\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{12} = 3\sqrt{2}$.

Aufgabe 7.2

a)

Die unterste Gleichung in der Parameterdarstellung von E_3 ist

$$z - 3 = 0 .$$

Da diese Gleichung bereits eine Ebene eindeutig beschreibt (die Gleichung ist sogar HNF), gilt

$$E_3 : z - 3 = 0 . \qquad (*)$$

Es gilt:

$$(x, y, z) \in E_1 \cap E_2 \cap E_3$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -y + z - 2 = 0 \\ 3x + y + 2z - 1 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$$

Lösen dieses LGS liefert:

$z = 3$

$y = z - 2 = 1$

$x = \frac{1}{3}(1 - y - 2z) = -2$

Somit $S = E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

b)

Einsetzen der Parameterdarstellung von g in die Gleichung $(*)$ von E_3 liefert $\alpha = 3$, somit hat P die Koordinaten $(-2, 2, 3)$.

7.2 b) Forts.

Es ist $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

E_3 ist parallel zur x,y-Ebene. Daher sind alle auf Länge 1 normierten Richtungsvektoren von Geraden in E_3 von der Form $\begin{pmatrix} a \\ \pm\sqrt{1-a^2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Schneidet eine in E_3 liegende Gerade die Gerade g unter dem Winkel $\gamma = \frac{\pi}{3}$, dann muss also gelten:

$$\frac{\left\langle \begin{pmatrix} a \\ \pm\sqrt{1-a^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{2} \iff a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Somit sind

$$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

die in E_3 liegenden Geraden, die g in P unter $\gamma = \frac{\pi}{3}$ schneiden.

c)

An der Gleichung von E_1 erkennt man, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein nicht-normierter Normalenvektor von E_1 ist.

Der Lotfußpunkt von P auf E_1 (d.h. der Punkt in E_1, der minimalen Abstand zu P hat) ist der Schnittpunkt von E_1 und der Lotgeraden

$$L : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \beta\,\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Einsetzen der Parameterdarstellung von L in die Gleichung von E_1 liefert $\beta = \frac{1}{2}$, somit hat der Lotfußpunkt von P auf E_1 die Koordinaten $(-2, 3/2, 7/2)$.

Aufgabe 7.3

a)

Die beiden Geraden sind nicht parallel, da der Richtungsvektor der einen Geraden kein Vielfaches des Richtungsvektors der anderen Geraden ist. Die Geraden schneiden sich auch nicht, denn sonst gäbe es $s, t \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Addiert man die erste und dritte Gleichung, folgt $2 = 6t$, addiert man die zweite und dritte Gleichung, folgt $-4 = 3t$, was im Widerspruch zu $2 = 6t$ steht. Also können sich die Geraden nicht schneiden. Insgesamt bleibt nur, dass beide Geraden windschief sind.

7.3 b)

Eine Parameterdarstellung von E ist

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \pm \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \pm \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n_0} = \pm \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es ist $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 10 \geq 0$, somit

$\vec{n_0}_{HNF} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

HNF von E: $\frac{1}{\sqrt{6}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} x_3 - \frac{10}{\sqrt{6}} = 0$

Da h parallel zu E ist, ist ihr Abstand von E gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes auf h zu E, zum Beispiel der des Ursprungs.

An der HNF liest man ab, dass der Ursprung den Abstand $\frac{10}{\sqrt{6}}$ zu E hat, somit

$d(h, E) = \frac{10}{\sqrt{6}}$.

7.3 c) vgl. Vorlesungsskript, Kap. 16, S. 74 ff.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\overrightarrow{OP} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist, und sei

L mit $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Lotfußpunkt von

P auf g. Dann muss gelten:

$\overrightarrow{LP} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

und, weil P von allen Punkten auf h den geringsten Abstand zu g hat, auch

$\overrightarrow{LP} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Also:

$$\begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \lambda - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \mu = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \lambda - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \mu = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \end{cases}$$

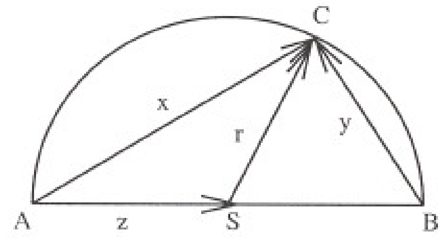
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6\lambda - 3\mu = -5 \\ 30\lambda + 6\mu = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Somit $P = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right)$.

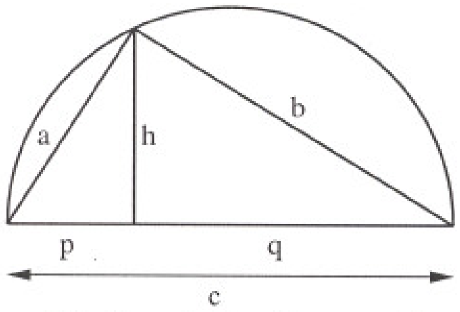
Aufgabe 7.4

a)
Mit den Bezeichnungen aus der Skizze



führen wir die folgenden Vektoren ein: $x := C - A, y := C - B, z := S - A$ und $r := C - S$. Zu zeigen ist nun $< x, y >= 0$. Es gilt $x = z + r$ und $y = r - z$. Somit gilt: $< x, y >=< z + r, r - z >=< z, r > -\|z\|^2 + \|r\|^2 - < r, z >= \|r\|^2 - \|z\|^2$. Dies ist 0, da $\|z\| = \|r\|$.

b)
Mit den Bezeichnungen aus der Skizze



ergibt sich mit dem Satz von Pythagoras:
$i)\ a^2 = h^2 + p^2 \qquad ii)\ b^2 = h^2 + q^2 \qquad iii)\ c^2 = a^2 + b^2$.
Da $c = p + q$ und Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} (p+q)^2 &= h^2 + p^2 + h^2 + q^2 \\ p^2 + 2pq + q^2 &= 2h^2 + p^2 + q^2 \\ 2pq &= 2h^2 \Longleftrightarrow h^2 = pq\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 7.5

a)

Es ist zu untersuchen, für welche $\lambda_k \in \mathbb{R}$ man

$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ erhält.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \\
&= \lambda_1((\alpha-1)a_2 + 2a_3) + \lambda_2(2a_1 + (2\alpha-3)a_2 + 4a_3) \\
&\quad + \lambda_3(a_1 + (\alpha-1)a_2 + a_3) \\
&= (2\lambda_2 + \lambda_3)a_1 + ((\alpha-1)\lambda_1 + (2\alpha-3)\lambda_2 + (\alpha-1)\lambda_3)a_2 \\
&\quad + (2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3)a_3
\end{aligned}$$

Da die Vektoren a_1, a_2, a_3 linear unabhängig sind, folgt

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
 & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
(\alpha-1)\lambda_1 & + & (2\alpha-3)\lambda_2 & + & (\alpha-1)\lambda_3 & = & 0 \\
2\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0
\end{array}\right\} \quad (*)$$

Die Vektoren b_1, b_2, b_3 sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ist, also das LGS $(*)$ nur die triviale Lösung besitzt.

7.5 a) Forts.

				für b) $\alpha=0$	für d) $\alpha\neq 0$		
0	2	1	0	1	1	0	0
$\alpha-1$	$2\alpha-3$	$\alpha-1$	0	β	0	1	0
2	4	1	0	2	0	0	1
2	4	1	0	2	0	0	1
0	2	1	0	1	1	0	0
0	-1	$\frac{\alpha-1}{2}$	0	$\beta+1$	0	1	$\frac{1-\alpha}{2}$
2	4	1	0	2	0	0	1
0	2	1	0	1	1	0	0
0	0	$\frac{\alpha}{2}$	0	$\beta+\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1-\alpha}{2}$

Das LGS besitzt also genau dann nur die triviale Lösung, wenn $\alpha \neq 0$ ist.

Somit sind die b_1, b_2, b_3 genau dann linear unabhängig, wenn $\alpha \neq 0$ ist.

b)

Sei $\alpha = 0$. Analog zu den Rechnungen in a) erhält man

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = x = 1 a_1 + \beta a_2 + 2 a_3$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \alpha-1 & 2\alpha-3 & \alpha-1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dieses LGS ist genau dann lösbar (siehe oben), wenn $\beta = -\frac{3}{2}$ ist. x lässt sich also nur für $\beta = -\frac{3}{2}$ mittels b_1, b_2, b_3 darstellen. (Bem.: Die Darstellung ist nicht eindeutig.)

7.5 c)

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\alpha = 0$.

Dann gilt:

$\overrightarrow{OA} = b_1$, $\overrightarrow{OB} = b_2$, $\overrightarrow{OC} = b_3$, $\overrightarrow{OD} = x$.

Da für $\alpha = 0$ die Vektoren b_1, b_2, b_3 linear abhängig sind, liegen die Punkte A, B, C mit dem Ursprung in einer Ebene, das bedeutet, dass ihre Ortsvektoren gleichzeitig Richtungsvektoren dieser Ebene sind und jeder Richtungsvektor und jeder Punkt dieser Ebene als Linearkombination von $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ darstellbar ist. Somit liegt D genau dann mit A, B, C in einer Ebene, wenn sich x mittels b_1, b_2, b_3 darstellen lässt. Dies geht nach 7.5 b) nur für $k = -\frac{3}{2}$.

d)

Hierfür muss man die drei Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \alpha-1 & 2\alpha-3 & \alpha-1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1i} \\ \lambda_{2i} \\ \lambda_{3i} \end{pmatrix} = e_i \qquad i = 1,2,3$$

lösen. Mit Hilfe der ~~Ausnahmen~~ jeweiligen Dreiecksformen (siehe oben) erhält man

$\lambda_{11} = \frac{1}{2\alpha} - 1$, $\lambda_{12} = \frac{1}{\alpha}$, $\lambda_{13} = \frac{1}{2\alpha}$,

$\lambda_{21} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}$, $\lambda_{22} = -\frac{1}{\alpha}$, $\lambda_{23} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}$,

$\lambda_{31} = \frac{1}{\alpha}$, $\lambda_{32} = \frac{2}{\alpha}$, $\lambda_{33} = \frac{1}{\alpha} - 1$, 7.5 d) Forts.

Also

$$a_1 = \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) b_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}\right) b_2 + \frac{1}{\alpha} b_3 ,$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha} b_1 - \frac{1}{\alpha} b_2 + \frac{2}{\alpha} b_3 ,$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} b_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}\right) b_2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) b_3 .$$

7.5 e)

Sei V nun der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und $a_1 = 1$, $a_2 = x$, $a_3 = x^2$ und $\alpha = 2$. Dann gilt:

$2x^2 + x = b_1$, $4x^2 + x + 2 = b_2$, $x^2 + x + 1 = b_3$,

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = a_1 + 2a_2 + a_3$.

Nach 7.5 d) erhalten wir

$$a_1 = -\frac{3}{4} b_1 + \frac{1}{4} b_2 + \frac{1}{2} b_3 ,$$

$$a_2 = \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2 + b_3 ,$$

$$a_3 = \frac{1}{4} b_1 + \frac{1}{4} b_2 - \frac{1}{2} b_3 ,$$

und daher

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 &= -\frac{3}{4} b_1 + \frac{1}{4} b_2 + \frac{1}{2} b_3 + 2\left(\frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2 + b_3\right) \\
&\quad + \frac{1}{4} b_1 + \frac{1}{4} b_2 - \frac{1}{2} b_3 \\
&= -\frac{1}{2} b_2 + 2 b_3 + \frac{1}{2} b_1 \\
&= +\frac{1}{2}(2x^2 + x) - \frac{1}{2}(4x^2 + x + 2) \\
&\quad + 2(x^2 + x + 1) .
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.6

a)

$\vec{x} \in U \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$,

$\vec{x} \in W \Leftrightarrow \exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix}$,

$\Rightarrow$

$\vec{x} \in U \cap W \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \lambda_2 \wedge \lambda_1 = 2\lambda_2$

Somit $U \cap W =$ Spann $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$ und damit ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

b)

U und W beschreiben Ebenen im $\mathbb{R}^3$, die ~~m~~ beide~~m~~ den Ursprung enthalten, $U \cap W$ beschreibt den Schnitt dieser Ebenen, der hier eine Ursprungsgerade ist.

c)

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. Mehr als jeweils drei Vektoren können im $\mathbb{R}^3$ nicht linear unabhängig sein. Somit ist Rang $A = 3$.

Alternativer Lösungsweg:

$$\begin{aligned} \text{Rang } A = \dim(U \cup W) &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \\ &= 2 + 2 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

7.6 d)

Seien A, B Unterräume von V. Dann gilt:

$0 \in A \wedge 0 \in B$

$\Rightarrow 0 \in A \cap B$.

Seien $x, y \in A \cap B$

$\Rightarrow x, y \in A \wedge x, y \in B$

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha x + \beta y \in A \wedge \alpha x + \beta y \in B$

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha x + \beta y \in A \cap B$.

Also ist $A \cap B$ Unterraum von V.

Der Schnitt zweier affiner Räume ist nicht immer ein affiner Raum, denn der Schnitt kann zum Beispiel die leere Menge sein, wie es bei parallelen, aber nicht identischen Ebenen oder Geraden der Fall ist.

Aufgabe 7.7

Gegeben $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ und $p_3(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ auf [-1,1] und das Skalarprodukt $< f, g >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

a)

$\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$

$\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx = \frac{1}{2}(x^3 - x)\Big|_{-1}^{1} = 0$

$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot x(3x^2 - 1)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} (\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x)\,dx = \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0$

b)

$\|p_1\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} dx} = \sqrt{x\big|_{-1}^{1}} = \sqrt{2}$

$\|p_2\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx} = \sqrt{\frac{x^3}{3}\big|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

$\|p_3\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (\frac{9}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4})\,dx} = \sqrt{(\frac{9}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x)\big|_{-1}^{1}}$

$= \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{10}$