Aufgabenblatt 11

Aufgabe 11.1

a)
$f(x) = (4x+5)^{-\frac{1}{3}}$, $f'(x) = 4(-\frac{1}{3})(4x+5)^{-\frac{4}{3}}$,
$f''(x) = 4^2(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(4x+5)^{-\frac{7}{3}} \dots f^{(k)}(x) = (-\frac{4}{3})^k(1\cdot 4 \dots (3k-2))(4x+5)^{-\frac{1}{3}-k}$
$\Longrightarrow T_0(x;1) = 3^{-\frac{2}{3}}$
$\Longrightarrow T_1(x;1) = 3^{-\frac{2}{3}} - 4\cdot 3^{-\frac{11}{3}}(x-1)$
$\Longrightarrow T_2(x;1) = 3^{-\frac{2}{3}} - 4\cdot 3^{-\frac{11}{3}}(x-1) + 32\cdot 3^{-\frac{20}{3}}(x-1)^2$
$\Longrightarrow T_3(x;1) = 3^{-\frac{2}{3}} - 4\cdot 3^{-\frac{11}{3}}(x-1) + 32\cdot 3^{-\frac{20}{3}}(x-1)^2 - 896\cdot 3^{-\frac{32}{3}}(x-1)^3$
$\Longrightarrow T_k(x;1) = 3^{-\frac{2}{3}} + \sum_{l=1}^{k}(-\frac{4}{3})^l \frac{1\cdot 4 \dots (3l-2)\cdot 3^{-(\frac{6l+2}{3})}}{l!}(x-1)^l.$

$g(x) = \sin x,\ g'(x) = \cos x,\ g''(x) = -\sin x,\ g'''(x) = -\cos x,$
$g^{(4)}(x) = g(x)$ und
$g^{(4k)}(x) = g(x) = \sin x,\ g^{(4k+1)}(x) = \cos x,\ g^{(4k+2)}(x) = -\sin x,\ g^{(4k+3)}(x) = -\cos x.$
Da $g^{(4k+1)}(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $g^{(4k+3)}(\frac{\pi}{2}) = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist
$T_0(x;\frac{\pi}{2}) = T_1(x;\frac{\pi}{2}) = 1$
$T_2(x;\frac{\pi}{2}) = T_3(x;\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2$
$T_{2m}(x;\frac{\pi}{2}) = T_{2m+1}(x;\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}.$

b)

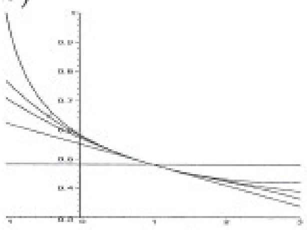


Bild: Funktion f und die Taylorpolynome $T_i(x;1)$ für $i=0,1,2,3$

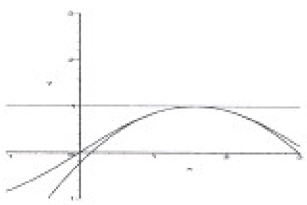


Bild: Funktion g und die Taylorpolynome $T_i(x;\frac{\pi}{2})$ für $i=0,1,2,3$

c)
Fehlerabschätzung (Approximation von $f(\frac{3}{2})$ durch $T_3(\frac{3}{2};1)$):
$|f(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};1)| = |R_3(\frac{3}{2};1)| = |\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(\frac{3}{2}-1)^4| = |(-\frac{4}{3})^4\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot(4\xi+5)^{-\frac{13}{3}}}{4!}(\frac{3}{2}-1)^4|.$
Gemäß Taylorschen Satz gilt $1 = x_0 < \xi < x = \frac{3}{2}$ und $(4\xi+5)^{-\frac{13}{3}}$ kann nach oben mit $\xi = 1$ abgeschätzt werden: $|f(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};1)| \leqslant |\frac{4^4\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot 9^{-\frac{13}{3}}}{3^4\cdot 4!\cdot 2^4}| = \frac{560}{3^{\frac{41}{3}}} \leqslant 1.69\cdot 10^{-4}.$
Bemerkung: $T_0(\frac{3}{2};1) = 3^{\frac{-2}{3}} = 0.480749$, $T_1(\frac{3}{2};1) = T_0(\frac{3}{2};1) - 2\cdot 3^{\frac{-11}{3}} = 0.445138$,
$T_2(\frac{3}{2};1) = T_1(\frac{3}{2};1) + 8\cdot 3^{\frac{-20}{3}} = 0.450414$, $T_3(\frac{3}{2};1) = T_2(\frac{3}{2};1) - 112\cdot 3^{\frac{-32}{3}} = 0.449502.$

Da $f(\frac{3}{2}) = 11^{-\frac{1}{3}} = 0.449644$ ist der tatsächliche Fehler $|f(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};1)| = 0.00014169$.

Fehlerabschätzung:
$|g(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2})| = |R_3(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2})| = |\frac{g^{(4)}(\xi)}{4!}(\frac{3-\pi}{2})^4| = |\frac{\sin(\xi)}{4!}(\frac{3-\pi}{2})^4|$,
nach dem Taylorschen Satz gilt $\frac{3}{2} = x < \xi < x_0 = \frac{\pi}{2}$ und somit können wir $\sin\xi$ nach oben abschätzen mit $\xi = \frac{\pi}{2}$ und erhalten als Fehler

$$|g(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2})| \leqslant |\frac{1}{4!}(\frac{3-\pi}{2})^4| < 1,05\ldots \cdot 10^{-6}$$

Bemerkung: Taylorpolynome: $T_0(x;\frac{\pi}{2}) = 1$, $T_1(x;\frac{\pi}{2}) = 1$, $T_2(x;\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2$, $T_3(x;\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2$. Auswertung von $T_3(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{2}(\frac{3-\pi}{2})^2 = 0,99749394$ und Vergleich mit
$g(\frac{3}{2}) = \sin\frac{3}{2} = 0,997494986$ liefert den Fehler $|g(\frac{3}{2}) - T_3(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2})| = 1,05\ldots \cdot 10^{-6}$

d) $h(x) = x\sqrt[3]{1+x} = x(1+x)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow h(0) = 0$
$h'(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x(1+x)^{-\frac{2}{3}} \Longrightarrow h'(0) = 1$
$h''(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x(1+x)^{\frac{-5}{3}} + \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x(1+x)^{-\frac{5}{3}} \Longrightarrow h''(0) = \frac{2}{3}$

$$\Longrightarrow T_2(x;0) = h(x_0) + h'(x_0)(x-x_0) + h''(x_0)\frac{1}{2!}(x-x_0)^2 = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^2 = x + \frac{1}{3}x^2$$

$h'''(x) = -\frac{4}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}} + \frac{10}{27}x(1+x)^{-\frac{8}{3}} - \frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3}(1+x)^{-\frac{5}{3}} + \frac{10}{27}x(1+x)^{-\frac{8}{3}}$
$\Longrightarrow |R_2(x;0)| = |(-\frac{2}{3}(1+\xi)^{-\frac{5}{3}} + \frac{10}{27}\xi(1+\xi)^{-\frac{8}{3}})\frac{x^3}{3!}|, \quad \xi \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
Wir setzen nun den größten x-Wert ein und erhalten

$$\begin{aligned}
|R_2(x;0)| &= |(-\frac{2}{3}(1+\xi)^{-\frac{5}{3}} + \frac{10}{27}\xi(1+\xi)^{-\frac{8}{3}})\frac{(\frac{1}{4})^3}{3!}| = \frac{1}{64\cdot 6}|-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^{\frac{5}{3}}} + \frac{10}{27}\xi\frac{1}{(1+\xi)^{-\frac{8}{3}}}| \\
&\leqslant \frac{1}{64\cdot 6}|-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{4})^{\frac{5}{3}}} + \frac{10}{27}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{4})^{\frac{8}{3}}}| = \frac{1}{64\cdot 6}|-\frac{2}{3}(\frac{4}{3})^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{27\cdot 4}(\frac{4}{3})^{\frac{8}{3}}| \\
&< 2.3\cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

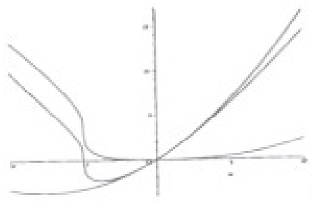


Bild: Funktion h, das Taylorpolynom $T_2(x;0)$ und das Restglied $R_2(x;0)$.

Aufgabe 11.2

Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion f, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2!}f''(\xi)x^2 = \ln 2 + \tfrac{1}{2}x - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2},$$

und dies stimmt offenbar auch für $x = 0$ (mit beliebigem ξ). Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$|f(x) - \ln 2 - \tfrac{1}{2}x| = \left|\frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\right| \leqslant \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

Aufgabe 11.3

a) Die Aussage „$\ln x = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$“ bedeutet definitionsgemäß, dass $(\ln x)/x^\alpha \to 0$ für $x \to \infty$ gilt. Diese Grenzwertaussage gilt für alle $\alpha > 0$. Für $x > 1$ ergibt sich nämlich

$$0 < \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln x}{e^{\alpha \ln x}} = \frac{\ln x}{1 + \alpha \ln x + \frac{1}{2!}(\alpha \ln x)^2 + \cdots} \leqslant \frac{\ln x}{\frac{1}{2!}(\alpha \ln x)^2} = \frac{2}{\alpha^2 \ln x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

b) Die Aussage ist äquivalent dazu, dass $x\sin(x^{-1})/x$ für $x \to 0$ beschränkt ist. Dies ist wegen $|\sin(x^{-1})| \leqslant 1$ offensichtlich richtig.

c) Diese Aussage bedeutet $\sin x - x = o(x^2)$ für $x \to 0$ und dies stimmt wegen

$$\frac{\sin x - x}{x^2} = \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots) - x}{x^2} = \frac{-\frac{1}{3!}x^3 + - \cdots}{x^2} = -\frac{1}{3!}x^1 + - \cdots \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

d) Dies ist äquivalent zu $\sqrt{1+x^2} - x = O(1/x)$ für $x \to \infty$, und dies trifft zu, denn

$$\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1/x}\right| = \left|x\big(\sqrt{1+x^2}-x\big)\right| = \left|\frac{x(1+x^2-x^2)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right| \leqslant \left|\frac{x}{x}\right| = 1.$$

Aufgabe 11.4

a) $\beta = 0$ ist nicht möglich.

$$I = \left(-\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{\pi}{|\beta|}\right)$$

$\beta \neq 0$: f ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen auf $I \setminus \{0\}$ stetig.
f ist auf I stetig, falls α, β, γ so gewählt sind, dass

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \gamma \qquad \text{gilt.}$$

Mit $\sin \beta x = \beta x - \frac{1}{3!}\beta^3 x^3 + o(x^4)$ $(x \to 0)$ hat man

$$f(x) = \frac{\alpha \sin \beta x - x}{x \sin \beta x} = \frac{x(\alpha\beta - 1) - \frac{1}{3!}\alpha\beta^3 x^3 + o(x^4)}{\beta x^2 - \frac{1}{3!}\beta^3 x^4 + o(x^5)}$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nur, falls $\underline{\alpha\beta = 1}$. In diesem Fall
ist $f(x) = -\frac{1}{3!}\alpha\beta^2 x + o(x^2)$ $\quad (x \to 0)$ $\quad (*)$

$$\to \lim_{x \to 0} f(x) = \underline{0 = \gamma}$$

<u>f ist auf I stetig, falls $\gamma = 0$ und $\alpha\beta = 1$ gelten.</u>

b) $f'(0)$ = (falls existent) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(f(x) - f(0))$

Mit $f(0) = 0$ und $(*)$ aus a) erhält man:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(f(x) - f(0)) = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{3!}\alpha\beta^2 x + o(x^2)\right)\frac{1}{x}$$

$$\underline{= -\frac{1}{3!}\alpha\beta^2 = -\frac{1}{6}\beta = f'(0)}$$

<u>$f'(0)$ existiert, falls $\alpha\beta = 1$, $\gamma = 0$. Es gilt $f'(0) = -\frac{1}{6}\beta$.</u>

Aufgabe 11.5

a) Die Funktion f ist eine auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall ($I = [-2, 2]$ kompakt) und stetige Funktion (Polynom) $\Longrightarrow$ globales Max. und Min. wird angenommen (Min-Max-Eigenschaft).

b) $f(x) = x^x = e^{x \ln x} > 0$, $f'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

Monotoniebetrachtung: $0 < x < \frac{1}{e} \Longrightarrow \ln x + 1 < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ ist streng monoton fallend in $(0, \frac{1}{e})$

$x > \frac{1}{e} \Longrightarrow \ln x + 1 > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ ist streng monoton wachsend in $(\frac{1}{e}, \infty)$. Bei $x = \frac{1}{e}$ liegt somit ein globales Minimum.

Aufgabe 11.6

Es gilt $L = r\pi + 2x + 2r$, also $r = \frac{L - 2x}{\pi + 2}$.

$\Rightarrow$ Fläche $F(x) = \frac{\pi}{2} r^2 + 2rx$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{L-2x}{\pi+2}\right)^2 + 2\,\frac{L-2x}{\pi+2}\,x .$$

Weiter gilt $0 \le x \le \frac{L}{2}$ und

$F(0) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{L}{\pi+2}\right)^2$, $F(\frac{L}{2}) = 0$.

Die Bedingung

$$F'(x) = 4\,\frac{L - \pi x - 4x}{(\pi+2)^2} = 0$$

liefert die eindeutige Extremstelle $x_0 = \frac{L}{\pi + 4}$

und wegen $F(x_0) > F(0)$ liegt dort das Maximum.

Aufgabe 11.7

a)

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$

$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow$ keine Nullstelle

Extremstellen:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2} \overset{!}{=} 0$$

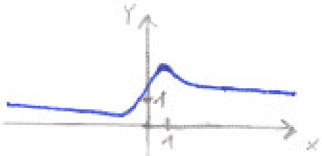
$\Rightarrow -2x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Verhalten für $|x| \to \infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

Skizze:



Aufgabe 11.7

b)

Definitionsbereich: Die Funktion f ist für $x = 0$ nicht definert $\Longrightarrow D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Nullstellen: Die Funktion besitzt keine Nullstellen, da $e^{\alpha\frac{1}{x}} \neq 0$ und $\frac{1}{\alpha^2+x^2} \neq 0$ für alle $x \in D$.

Verhalten am Rande des Defintionsbereichs: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

in der Nähe von $x = 0$:

i) $\alpha = 0: \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}e^0 = \infty$

ii) $\alpha > 0: \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha^2+x^2}e^{\alpha\frac{1}{x}} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{\alpha^2+x^2}e^{\alpha\frac{1}{x}} = 0$

iii) $a < 0: \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\alpha^2+x^2}e^{\alpha\frac{1}{x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{\alpha^2+x^2}e^{\alpha\frac{1}{x}} = \infty$

Extrema: $f'(x) = -\frac{2x}{(\alpha^2+x^2)^2}e^{\frac{\alpha}{x}} - \frac{\frac{\alpha}{x^2}}{\alpha^2+x^2}e^{\frac{\alpha}{x}} = e^{\frac{\alpha}{x}}\frac{1}{\alpha^2+x^2}(-\frac{2x}{\alpha^2+x^2} - \frac{\alpha}{x^2})$,

$f'(x) = 0$, wenn $-\frac{2x}{\alpha^2+x^2} - \frac{\alpha}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow -2x^3 - \alpha^3 - x^2\alpha = 0 \Longleftrightarrow 2x^3 + \alpha^3 + x^2\alpha = 0$.

Polynomdivision: $(x = -\alpha)$ ist Nullstelle

$$
\begin{array}{l}
\ \ (2x^3 + \alpha^3 + x^2\alpha) : (x + \alpha) = 2x^2 - \alpha x + \alpha^2 \\
\underline{-(2x^3 + 2\alpha x^2)} \\
\qquad -\alpha x^2 + \alpha^3 \\
\qquad \underline{-(-\alpha x^2 - \alpha^2 x)} \\
\qquad\quad \alpha^2 x + \alpha^3 \\
\qquad\quad \underline{-(\alpha^2 x + \alpha^3)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$x^2 - \frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha^2}{2} = 0 \Longleftrightarrow (x - \frac{\alpha}{4})^2 = -\frac{7\alpha^2}{16} \Longrightarrow$ keine weitere Lösung.

Die einzig mgl. Extremstellen sind: $\alpha > 0 \Longrightarrow x = -\alpha$ und $\alpha < 0 \Longrightarrow x = \alpha$

Es handelt sich jeweils um ein Maximum, denn z.B. für $x = \alpha$ $(\alpha < 0)$ haben wir $f(x) > 0\ \forall x \in D\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$.

Skizzen:

Bild1: $\alpha = 0$

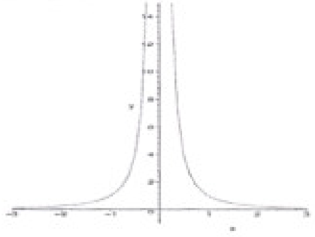


Bild2: $\alpha = 0.2$

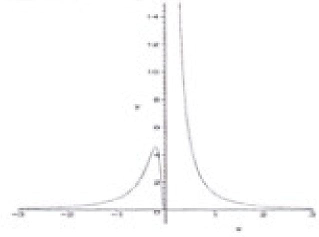
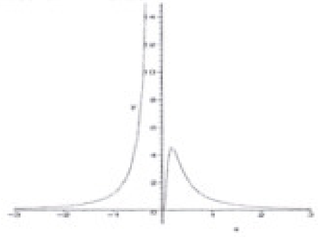


Bild3: $\alpha = -0.20$



Aufgabe 11.8

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{x\sin x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x+\sin x}{\sin x + x\cos x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1+\cos x}{2\cos x - x\sin x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan 5x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \frac{3}{5}(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x})^2 \overset{l'H}{=} \frac{3}{5}(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x})^2 = \frac{3}{5}(\frac{5}{-3})^2 = \frac{5}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1^+} (x+1)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{x+1}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{\frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}}{-(\frac{1}{x+1})^2} = -\frac{\pi}{2}(\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x+1}{\cos(\frac{\pi x}{2})})^2$
$\overset{l'H}{=} -\frac{\pi}{2}(\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi x}{2})})^2 = -\frac{\pi}{2}\cdot(\frac{1}{\frac{\pi}{2}})^2 = -\frac{2}{\pi}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2}(1+e^{-2x}) = \frac{1}{2}$

e) Betrachte die Funktion $f(x) = \cos x$. Zu jedem $x > 0$ existiert dann nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (0,x)$, so daß

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}, \quad \text{also} \quad -\sin\xi = \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Insbesondere gibt es zu $x_n = \frac{1}{n}$ ein solches ξ_n. Für $x_n = \frac{1}{n}$ ist dann $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$ und es gilt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$n(1-\cos\frac{1}{n}) = \frac{1-\cos x_n}{x_n} = \sin\xi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sin 0 = 0$$

f) Wir nehmen hier $f(y) = \cos\sqrt{y}$. Zu jedem $x > 1$ existiert dann $\xi \in (x-1, x+1)$, so daß

$$\frac{f(x+1)-f(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = f'(\xi), \quad \text{also} \quad \frac{\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}.$$

Dann ergibt sich als Abschätzung $|\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi}}$ und da für $x\to\infty$ auch $\xi\to\infty$, ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

g) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}) = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}) = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}) = 0$
$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}) = \sin \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}) = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x + x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{4x^3} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos x + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{12x^2}$
$\overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 2x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}}{24x} \overset{l'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x + (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 6x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 9x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 15x^4(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}}{24}$
$= \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

i) Mit $\ln(e^{3x}-5x)^{x^{-1}} = \frac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}$ erhalten wir
$\lim\limits_{x\to\infty} \ln(e^{3x}-5x)^{x^{-1}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{27e^{3x}}{9e^{3x}} = 3.$
Also $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{3x}-5x)^{x^{-1}} = e^3$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)+\tan^2 x}{x\sin x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(2x)+2\frac{\sin x}{\cos^3 x}}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{4\sin(2x)}{2x} + \frac{2}{\cos^3 x}\cdot\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}$

$= \frac{4+2}{1+1} = 3$, denn für $x \to 0: \frac{\sin(2x)}{2x} \to 1$, $\frac{2}{\cos^3 x} \to 2$, $\frac{\sin x}{x} \to 1$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{x^2} \ln \frac{\arctan x}{x} \overset{l'H}{=} 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\arctan x} \cdot \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2}}{2x} = 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^3(1+x^2)} \overset{l'H}{=}$
$3 \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2}}_{=1} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^3} \overset{l'H}{=} 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-1-2x\arctan x}{6x^2} = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = -1.$
Also $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{\arctan x}{x})^{\frac{3}{x^2}} = e^{-1}$

l) Für $x > 0$ gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \tan x \ln(\arcsin x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\arcsin x)}{\frac{1}{\tan x}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-\sin^2 x)$
$\overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} - \frac{2\sin x \cos x}{-\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \arcsin x + 1} = 0$ und somit
$\lim\limits_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{\tan x} = e^0 = 1$
$(\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \; (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x})$