Aufgabenblatt 12

Aufgabe 12.1

a) Wegen $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = (x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} > 0$ ist der Logarithmusterm für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert; es gilt

$$\begin{aligned}\left(\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)' &= \left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)'\\ &= \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\cdot\left(1+\frac{2\sqrt{2}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)'\\ &= \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\cdot\frac{2\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}x+1)-2\sqrt{2}x(2x-\sqrt{2})}{(x^2-\sqrt{2}x+1)^2}\\ &= \frac{-2\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{2\sqrt{2}(-x^2+1)}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2} = \frac{2\sqrt{2}(1-x^2)}{x^4+1}\,.\end{aligned}$$

Das Argument von arctan ist für $x=-1$ und für $x=1$ nicht definiert. Für $|x| \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)' &= \left(1+\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)^2\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)'\\ &= \left(\frac{(1-x^2)^2+2x^2}{(1-x^2)^2}\right)^{-1}\cdot\frac{\sqrt{2}(1-x^2)-\sqrt{2}x(-2x)}{(1-x^2)^2}\\ &= \frac{(1-x^2)^2}{x^4+1}\cdot\frac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}}{(1-x^2)^2} = \sqrt{2}\,\frac{x^2+1}{x^4+1}\,.\end{aligned}$$

Die Funktion f ist somit für $x \neq \pm 1$ differenzierbar und

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{2(x^4+1)} + \frac{x^2+1}{2(x^4+1)} = \frac{1}{1+x^4}\,.$$

b)

Mit Taylor:

$\arctan x = x + O(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x\arctan x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+O(x^3))}{1-1+\frac{1}{2}x^2+O(x^4)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+O(x^2)}{\frac{1}{2}+O(x^2)}\right) = 2$$

Mit l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x + \frac{x}{1+x^2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\cos x}\right) = 2$$

Aufgabe 12.2

a)

Die Strecke AC der Länge $s_1 = \sqrt{a^2+x^2}$ wird mit konstanter Geschwindigkeit v_1 durchlaufen. Für die dafür benötigte Zeit $t_1 = t_1(x)$ gilt daher

$$t_1(x) = \frac{s_1(x)}{v_1} = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2+x^2} .$$

Die Strecke CB der Länge $s_2 = \sqrt{c^2+(x-b)^2}$ wird mit konstanter Geschwindigkeit v_2 durchlaufen. Für die dafür benötigte Zeit $t_2 = t_2(x)$ gilt

$$t_2(x) = \frac{1}{v_2}\sqrt{c^2+(x-b)^2} .$$

Die gesamte Laufzeit ist daher

$$T(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{c^2+(x-b)^2} .$$

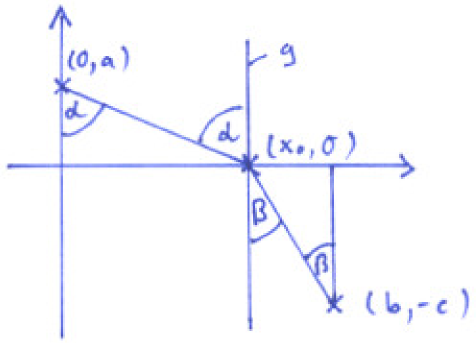
Da T stetig ist, nimmt T auf dem kompakten Intervall $[0,b]$ ein Minimum an. Bleibt zu zeigen, dass das Minimum im Innern von $[0,b]$ liegt. T ist stetig(!) differenzierbar auf $[0,b]$, und es ist

$$T'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{x-b}{\sqrt{c^2+(x-b)^2}} .$$

Folglich ist $T'(0) = -\frac{b}{v_2}\frac{1}{\sqrt{c^2+b^2}} < 0$, also T ist in einer Umgebung von 0 streng monoton fallend. Daher kann das Minimum nicht in 0 liegen. Außerdem ist $T'(b) = \frac{1}{v_1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} > 0$, also T ist in einer Umgebung von b streng monoton steigend. Daher kann das Minimum auch nicht in b liegen.

Also muss $x_0 \in \,]0,b[$ gelten. $\square$

12.2 b)



Da T an der Stelle x_0 ein Minimum annimmt, und x_0 im Innern von $[0, b]$ liegt, gilt

$$T'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_1} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} = \frac{1}{v_2} \frac{b - x_0}{\sqrt{c^2 + (b - x_0)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_1} \sin \alpha = \frac{1}{v_2} \sin \beta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{(Brechungsgesetz)}$$

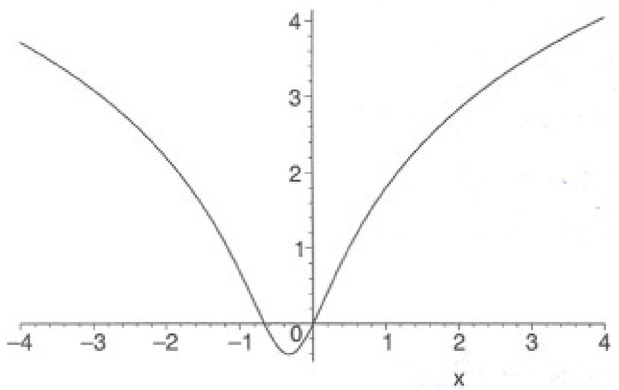
Aufgabe 12.3

a) z.z.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2} + x^2 - 2$ hat genau 2 Nullstellen auf $\mathbb{R}$. Betrachte f für $x \geqslant 0$, f stetig und $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = e - 1 > 0$, d.h. f besitzt nach ZWS mindestens eine Nullstelle in $(0, 1)$.
Monotonie: Sei $x > y \geqslant 0 \Longrightarrow x^2 > y^2 \Longrightarrow e^{x^2} > e^{y^2}$ (Monotonie der exp-Fkt)
$\Longrightarrow f(x) = e^{x^2} + x^2 - 2 > e^{y^2} + y^2 - 2 = f(y)$, d.h. f wächst streng monoton in $[0, \infty)$ und hat somit höchstens eine Nullstelle in $[0, \infty) \Longrightarrow f$ hat genau eine Nullstelle in $[0, \infty)$ und da f achsensymmetrisch zur y-Achse, denn
$f(-x) = e^{(-x)^2} + (-x)^2 - 2 = e^{x^2} + x^2 - 2 = f(x)$ hat$f$ genau eine Nullstelle in $(-\infty, 0)$ und somit genau 2 auf $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1) = \ln(3(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3})$
Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
Symmetrie: Die verschobene Funktion $g(x) := f(x - \frac{1}{3})$ ist gerade, denn
$g(x) = f(x - \frac{1}{3}) = \ln(3x^2 + \frac{2}{3}) = \ln(3(-x)^2 + \frac{2}{3}) = g(-x)$
und somit $f(x)$ achsensymmetrisch zu $x = -\frac{1}{3}$.
Pole: keine
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln(3x^2 + 2x + 1) = \infty$
Nullstellen: $\ln(3x^2 + 2x + 1) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x_1 = -\frac{2}{3},\ x_2 = 0$
Extrema und Monotonie: $f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x+1} = 0 \Longrightarrow x_3 = -\frac{1}{3}$, also
$f'(x) < 0$ für $x \in (-\infty, x_3)$ und f streng monoton fallend bzw.
$f'(x) > 0$ für $x \in (x_3, \infty)$ und f streng monoton steigend
$\Longrightarrow x_3$ ist strenges globales Minimum.
Supremum von f existiert nicht.
Infimum von f = Minimum von $f = f(-\frac{1}{3}) = \ln\frac{2}{3}$
Wendepunkte und Konvexität:
$f''(x) = \frac{-18((x+\frac{1}{3})^2 - \frac{2}{9})}{(3x^2+2x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x_4 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3},\ x_5 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\Longrightarrow f''(x) \begin{cases} < 0 \text{ für } x \in (-\infty, x_4) & \Longrightarrow \text{ f ist streng konkav} \\ > 0 \text{ für } x \in (x_4, x_5) & \Longrightarrow \text{ f ist streng konvex} \\ < 0 \text{ für } x \in (x_5, \infty) & \Longrightarrow \text{ f ist streng konkav.} \end{cases}$$

Es gibt somit 2 Wendepunkte x_4 (Rechts-Linkskurve) und x_5 (Links-Rechtskurve).
Graph f:



Aufgabe 12.4

a) Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2} \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned}1-(f(x))^2 &= 1-\left(1-8(e^{2x}+4)^{-1}\right)^2 = 1-\left(1-16(e^{2x}+4)^{-1}+64(e^{2x}+4)^{-2}\right)\\ &= 16(e^{2x}+4)^{-1}-64(e^{2x}+4)^{-2} = 16(e^{2x}+4)^{-2}\left((e^{2x}+4)-4\right) = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2}\end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.
f hat als Bildbereich $(-1,1)$, denn $(e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0,\frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\forall y \in (-1,1): \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1-(f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2}.$$

b) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned}1-8(e^{2x}+4)^{-1} = y \quad &\leftrightarrow \quad (1-y)^{-1} = \tfrac{1}{8}(e^{2x}+4) \quad \leftrightarrow \quad 8(1-y)^{-1}-4 = e^{2x}\\ &\leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}\ln\left(8(1-y)^{-1}-4\right)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$(f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{8(1-y)^{-1}-4} \cdot \frac{8}{(1-y)^2} = \frac{4}{8(1-y)-4(1-y)^2} = \frac{4}{4-4y^2} = \frac{1}{1-y^2}.$$

c) Es gilt $f(0) = 1-\frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1-(-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x-\tfrac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y-y_0)+f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y+\tfrac{15}{16}.$$

Aufgabe 12.5

a) Wir verwenden die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion $e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ mit Konvergenzradius ∞ (siehe Vorlesung) und setzen $z = x^4$ und erhalten somit $e^{x^4} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{k!}$. Der Konvergenzradius ist dann ebenfalls ∞.

b)

$$g(x) = x^3 \frac{1}{1+x^2} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+3}$$

Der Konvergenzradius ist wie bei der geometrischen Reihe, d.h. $|x^2| < 1$, also $|x| < 1$, d.h. der Konvergenzradius ist 1.

Aufgabe 12.6

a) Nach Vorlesung (oder Bronstein) gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \underline{\text{genau für } -1 < x \leq 1.}$$

Für $|\beta x| < 1$ gilt (geometr. Reihe)

$$\alpha \frac{x}{1+\beta x} = \alpha x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n x^{n+1}$$

$$= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \beta^{n-1} x^n \qquad \overline{(*)}$$

$$\rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{1}{n} - \alpha \beta^{n-1} \right\} x^n$$

$\{\ldots\}$ soll verschwinden für möglichst viele n:

$n=1$: $\underline{\alpha = 1}$, $n=2$: $\underline{\frac{1}{2} = \alpha\beta = \beta}$

b) Aus a) liest man ab:

$$\underline{f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) x^n} \qquad \overline{(**)}$$

c) $r = \min(r_1, r_2)$ $\quad r_1 = 1$ vom $\ln$-Anteil

$r_2 = 2$ von $\overline{(*)}$: $|\beta x| < 1$ mit $\beta = \frac{1}{2}$

Also $\underline{r = 1}$.

<u>Konvergenz liegt nur für x mit $-1 < x \leq 1$ vor</u> (Vorlesung).

Aus $f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ und $\overline{(**)}$ folgt:

$$\underline{f^{(221)}(0) = (221)! \left(\frac{1}{221} - \left(\frac{1}{2}\right)^{220} \right)}$$

Aufgabe 12.7

a) $r = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{32}{32}| = 1$. Der Konvergenzradius ist somit 1.

b) mit $a_n = 2^n$ und $z = x^2$ ergibt sich für die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{2^n}{2^{n+1}}| = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) mit $a_n = \sinh n$ ergibt sich: $r = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\sinh n}{\sinh(n+1)}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{e^n - e^{-n}}{e^{n+1} - e^{-(n+1)}}|$
$= \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{1-e^{-2n}}{e-e^{-2n-1}}| = \frac{1}{e}$

d) Die Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$ besitzt die beiden Häufungpunkte 0 und 1. Den Konvergenzradius bestimmen wir mit der Formel von Cauchy-Hadamard:
$r = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|-n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$ (siehe Aufg. 8.4 i)

e) Mit $a_n = (n^4 - 4n^3)$ ergibt sich

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^4 - 4n^3}{(n+1)^4 - 4(n+1)^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1 - \frac{4}{n}}{(1+\frac{1}{n})^4 - \frac{4}{n}(1+\frac{1}{n})^3}\right| = 1.$$

f) Mit $a_v = \frac{1}{(4+(-1)^v)^{3v}}$ und $x = z^5$ betrachten wir zunächst die Reihe $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_v x^v$.
Die Folge $\sqrt[v]{|a_v|} = (\frac{1}{4+(-1)^v})^3$ besitzt die beiden Häufungspunkte $(\frac{1}{5})^3$ und $(\frac{1}{3})^3$.
Der Konvergenzradius wird nach der Formel von Cauchy-Hadamard berechnet:
$\frac{1}{\lim\limits_{v\to\infty} \sup \sqrt[v]{|a_v|}} = 3^3$. Der Konvergenzradius der Ausgangsreihe ist somit $r = 3^{\frac{3}{5}}$.

g) Mit $a_k = \frac{\arctan(k^4)}{2^k}$ erhalten wir
$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\frac{\arctan(k^4)}{2^k}|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{|\arctan(k^4)|}}{2}} = \limsup\limits_{k\to\infty} \frac{2}{\sqrt[k]{|\arctan(k^4)|}}$
$= \frac{2}{\limsup\limits_{k\to\infty} |\arctan(k^4)|^{\frac{1}{k}}} = 2$, da

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln \underbrace{|\arctan(k^4)|}_{\to \frac{\pi}{2}} = 0$ und $e^{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln|\arctan(k^4)|} = 1$

Aufgabe 12.8

a) Die Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig und punktweise auf $]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}[$ gegen $k \equiv 0$, denn

$$\sup_{x\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[} |k_n(x) - k(x)| = \sup_{x\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[} \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

b) Es gilt $f_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in [0,1)$, so gilt $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion p mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0,1). \end{cases}$$

Auf $[0,1]$ ist die Grenzfunktion f unstetig, die Funktionen f_n hingegen sind stetig. Die Konvergenz auf $[0,1]$ ist somit nicht gleichmässig.

$f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise für $x \in [0,1[$ gegen die Nullfunktion. Die punktweise Konvergenz besagt, daß es für alle $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in [0,1[$ es ein $N(\varepsilon, x_0)$ gibt, so daß

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = x_0^n < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant N(\varepsilon, x_0).$$

Dieses $N(\varepsilon, x_0)$ zu erhalten wir durch

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = x_0^n < \varepsilon \Longleftrightarrow n \ln x_0 < \ln \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x_0}.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = 0$ können wir $N(\varepsilon, x_0)$ nicht unabhängig von x_0 wählen und somit konvergiert die Folge nicht gleichmässig auf $[0,1[$.

Auf $[0, \frac{1}{2}]$ liegt gleichmässige Konvergenz vor. Es gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |x^n| = |x|^n \leqslant (\frac{1}{2})^n$$

und somit konvergiert $\sup\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)|$ gegen Null.

c) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(0) = 0$ und für $x \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{(nx)^2}{1+(nx)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{x^2}{n}}{\frac{1}{n^3}+x^3} = 0$, d.h. die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $g \equiv 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion g_n besitzt im Punkt $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{n} \in [0,\infty[$ ein Maximum:
$g_n'(x) = \frac{2n^2x - n^5x^4}{(1+(nx)^3)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{2}}{n}$, $g_n'(x) > 0$ für $x \in [0, \frac{\sqrt[3]{2}}{n}[\Longrightarrow g_n$ monoton wachsend und $g_n'(x) < 0$ für $x \in]\frac{\sqrt[3]{2}}{n}, \infty[\Longrightarrow g_n$ monoton fallend. Es gilt somit

$$\sup_{x\in[0,\infty[} |g_n(x) - g(x)| = \frac{(n\frac{\sqrt[3]{2}}{n})^2}{1 + (n\frac{\sqrt[3]{2}}{n})^3} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3},$$

d.h. die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmässig auf $[0,\infty[$.

Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig auf $[1,\infty[$ gegen $g \equiv 0$, denn

$$\sup_{x\in[1,\infty[} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\in[1,\infty[} \frac{(nx)^2}{1+(nx)^3} \leqslant \sup_{x\in[1,\infty[} \frac{(nx)^2}{(nx)^3} = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty).$$