

Übungen

Aufgabe 14.1 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Zahlen a_n und b_n gegeben durch

$$a_n := \int_{n-1}^n \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx, \quad b_n := \int_{n-1}^{n+1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

a) Berechnen Sie a_n und b_n für jedes $n \in \mathbb{N}$, und bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen (a_n) und (b_n) , falls diese konvergieren.

b) Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent?

Aufgabe 14.2 a) Bestimmen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n^{\frac{1}{4}}} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

b) Zeigen Sie

$$1 - 2\varepsilon \leq \int_{-1}^1 \frac{3}{2}x^2 + \varepsilon \sin\left(x \arctan(\sqrt{\ln(2+x^4)})\right) dx \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Aufgabe 14.3 Berechnen Sie alle Stammfunktionen von der Funktion

$$f(x) = \frac{2e^{6x} + 4e^{4x} - e^{2x} - 1}{e^{4x} - 1}, \quad x > 0$$

und zeigen Sie, dass für jede solche Stammfunktion F gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{e^{2x}} = 1.$$

Aufgabe 14.4 Berechnen Sie folgende Integrale mittels Partialbruchzerlegung

a) $\int \frac{x^7 - x^5 + 9x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 5x + 7}{x^5 - x^4 - x + 1} dx$

b) $\int \frac{x+1}{x(x^3-1)} dx$

c) $\int \frac{1}{1+x^4} dx$

Aufgabe 14.5 Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\tan(x)}} dx$

b) $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\pi-x}{\sin(x)}} dx$

c) $\int_{-1}^1 \frac{\arctan(x)}{\sinh^2(x)} dx$

d) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{e^{\sqrt{x}}} dx$

Aufgabe 14.6 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

b) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

c) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{(2x-1)^2} dx$

Aufgabe 14.7 Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = (x + \frac{2}{x})y$.

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung durch Trennung der Veränderlichen.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung über einen Potenzreihenansatz der Form

$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Aufgabe 14.8 Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

a) $y' + y \cos x = \sin x \cos x, \quad y(0) = 1$

b) $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

c) $y' + xy + \frac{1}{2}(xy)^3 = 0, \quad y(0) = \sqrt{2}$

d) $y' + y + (\frac{1}{3} - x)y^4 = 0$

Hörsaalübung am 7.2.06: Aufgaben 14.1, 14.2, 14.3, 14.4,

Tutorien in der Woche 13.–17.2.06: Aufgaben 14.5, 14.6, 14.7 14.8.