UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
7. November 2006

**Lösungen zum 2. Übungsblatt**

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

## Lösung zu Aufgabe H1

(a) (i) Zu zeigen: $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$.

Wir zeigen zuerst die Inklusion

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \subset (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

und dann die Inklusion

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \supset (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3).$$

$\subset$: Sei also $x \in M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} x \in M_1 \quad &\wedge \quad x \in M_2 \cup M_3 \\ \Rightarrow x \in M_1 \quad &\wedge \quad (x \in M_2 \vee x \in M_3) \\ \Rightarrow (x \in M_1 \wedge x \in M_2) \quad &\vee \quad (x \in M_1 \wedge x \in M_3) \\ \Rightarrow x \in (M_1 \cap M_2) \quad &\vee \quad (x \in (M_1 \cap x \in M_3) \\ \Rightarrow x \in (M_1 \cap M_2) \quad &\cup \quad (M_1 \cap M_3) \end{aligned}$$

Also folgt $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \subset (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$.

$\supset$: Sei jetzt $x \in (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x \in (M_1 \cap M_2) \quad &\vee \quad x \in (M_1 \cap M_3) \\ \Rightarrow (x \in M_1 \wedge x \in M_2) \quad &\vee \quad (x \in M_1 \wedge x \in M_3) \\ \Rightarrow x \in M_1 \quad &\wedge \quad (x \in M_2 \vee x \in M_3) \\ \Rightarrow x \in M_1 \quad &\wedge \quad (M_2 \cap M_3) \\ \Rightarrow x \in (M_1 \quad &\cap \quad (M_2 \cap M_3) \end{aligned}$$

Also folgt $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \supset (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$.

Mit diesen beiden Inklusionen folgt die Behauptung.

(ii) Zu zeigen: $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$
Analog zu Teil (a) zeigen wir wieder die beiden Inklusionen:

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) \subset (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$
$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) \supset (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$\subset$: Sei $x \in M_1 \cup (M_2 \cap M_3)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in M_1 &\quad \vee \quad x \in (M_2 \cap M_3) \\ \Rightarrow x \in M_1 &\quad \vee \quad x \in (M_2 \wedge x \in M_3) \\ \Rightarrow (x \in M_1 \vee x \in M_2) &\quad \wedge \quad (x \in M_1 \vee x \in M_3) \\ \Rightarrow (x \in M_1 \cup M_2) &\quad \wedge \quad (x \in M_1 \cup M_3) \\ \Rightarrow x \in (M_1 \cup M_2) &\quad \cap \quad (M_1 \cup M_3) \end{aligned}$$

Also $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) \subset (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$.

$\supset$: Umgekehrt sei jetzt $x \in (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (x \in M_1 \cup M_2) &\quad \wedge \quad (x \in M_1 \cup M_3) \\ \Rightarrow (x \in M_1 \vee x \in M_2) &\quad \wedge \quad (x \in M_1 \vee x \in M_3) \\ \Rightarrow x \in M_1 &\quad \vee \quad (x \in M_2 \wedge x \in M_3) \\ \Rightarrow x \in M_1 &\quad \vee \quad (x \in M_2 \cap M_3) \\ \Rightarrow x \in M_1 &\quad \cup \quad (M_2 \cap M_3) \end{aligned}$$

Also $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) \supset (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$.

Mit diesen beiden Inklusionen folgt die Behauptung.

(b) Nach Definition nimmt die charakteristische Funktion einer Menge $A$ den Wert 1 wenn $x \in A$ und 0 sonst. Damit stellten wir die folgenden drei Behauptungen auf:

(i) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$

(ii) $\chi_{C_X(A)} = 1 - \chi_A$

(iii) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$, wenn $A \cap B = \emptyset$

Vorbemerkung: Es ist klar, daß die charaktistische Funktion eine Abbildung von $X$ nach $\{0, 1\}$ ist. Im folgenden sei jetzt $x \in X$ beliebig.

zu (i) Weiter sei $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$. Nach der Defintion der charakteristischen Funktion ist dann $\chi_{A \cap B} = 1$ und $\chi_A = 1$, $\chi_B = 1$ also $\chi_A \chi_B = 1$. Daraus folgt die Behauptung, denn $\chi_{A \cap B} = 1 = \chi_A \chi_B$.
Jetzt sei $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$. Daraus folgt einerseits, daß $\chi_{A \cap B} = 0$ und anderseits, daß $\chi_A = 0$ oder $\chi_B = 0$ also $\chi_A \chi_B = 0$.

Also gilt $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.

zu (ii) Wir benutzen die Definition der charakteristischen Funktion angewandt auf die Komplementmenge, Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\chi_{C_X(A)} &= \begin{cases} 1 \text{ für } x \in C_X(A) \\ 0 \text{ für } x \in C_X(C_X(A)) = A \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ für } x \in C_X(A) \\ 0 \text{ für } x \in A \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1-1 \text{ für } x \in A \\ 1-0 \text{ für } x \in C_X(A) \end{cases} = 1 - \begin{cases} 1 \text{ für } x \in A \\ 0 \text{ für } x \in C_X(A) \end{cases} = 1 - \chi_A
\end{aligned}$$

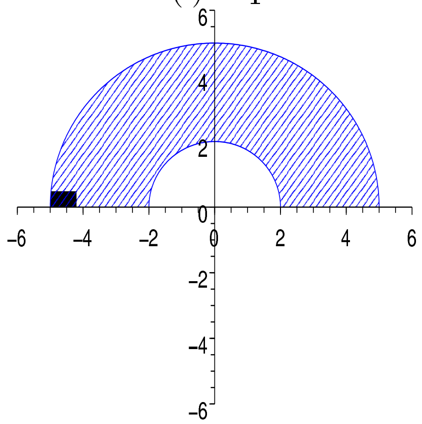
zu (iii) Sei $x \in A \cup B \Rightarrow \; x \in A \vee x \in B$, da aber die Mengen $A$ und $B$ als disjunkt voraausgesetzt sind, ist $x$ exklusiv in einer der beiden Mengen. Daraus folgt, daß $\chi_A = 1 \wedge \chi_B = 0$ oder $\chi_A = 0 \wedge \chi_B = 1$. Daraus folgt dann $\chi_A + \chi_B = 1$. Andererseits gilt $\chi_{A \cap B} = 1$ nach Definition. Anderseits sei jetzt $x \notin A \cup B \Rightarrow \; x \notin A \wedge x \notin B$, d.h. $\chi_A = 0$ und $\chi_B = 0$, also $\chi_A + \chi_B = 0 = \chi_{A \cap B}$.

Also gilt $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$.

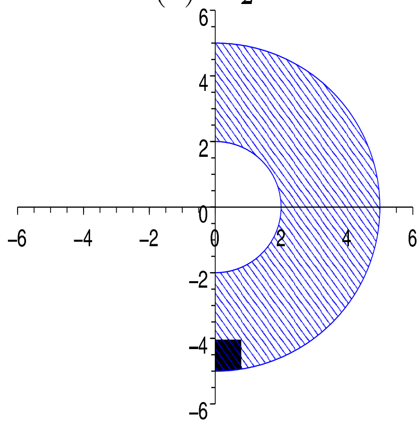
**Lösung zu Aufgabe H2**

(a)

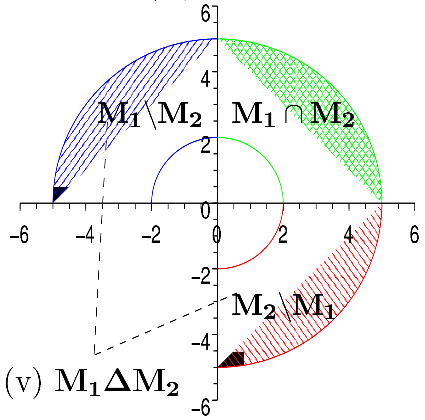
(i) $\mathbf{M_1}$



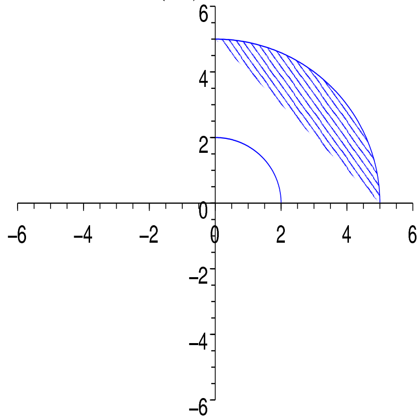
(ii) $\mathbf{M_2}$



(iii) $\mathbf{M_1 \cup M_2}$



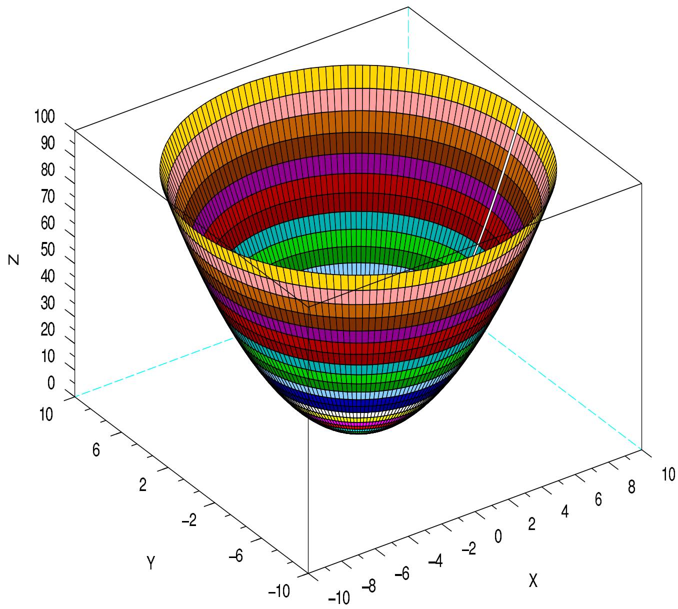

(iv) $\mathbf{M_1 \cap M_2}$



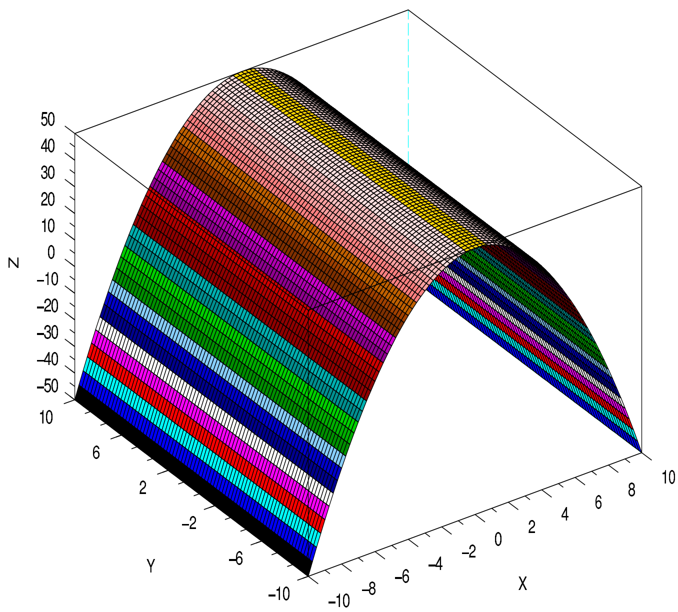
— bitte wenden —

(b) (i) * Die Menge $E_1$ stellt eine Ellipsoid mit kreisförmigen Querschnitt parallel zur $x, y - Ebene$ dar.

* Die Menge $P_1$ ist ein parabolischen Zylinder, dessen Mantellinen parallel zur $x$-Achse liegen.




$z = x^2 + y^2$




$z = 50 - y^2$

Die beiden Bilder zeigen die Mantelflächen der Mengen $E_1$ und $P_1$.

(ii) Jetzt betrachten wir die Projektionen auf die $x, y-$, $x, z-$ und $y, z$-Ebene.

— bitte wenden —

Dazu schauen wir uns das folgende Gleichungssystem an, daß aus den Gleichungen der Mantellinien der beiden Mengen $E_1$ und $P_1$ besteht. Damit erhalten wir die Ränder der Projektionen der Schnittmenge in die entsprechende Ebene.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z && (1) \\ 50 - y^2 &= z. && (2) \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen in (1) liefert $x^2 + y^2 = 50 - y^2$ bzw. $x^2 + 2y^2 = 50$. Division durch 50 liefert die Gleichung für die Projektion in die $x, y$-Ebene

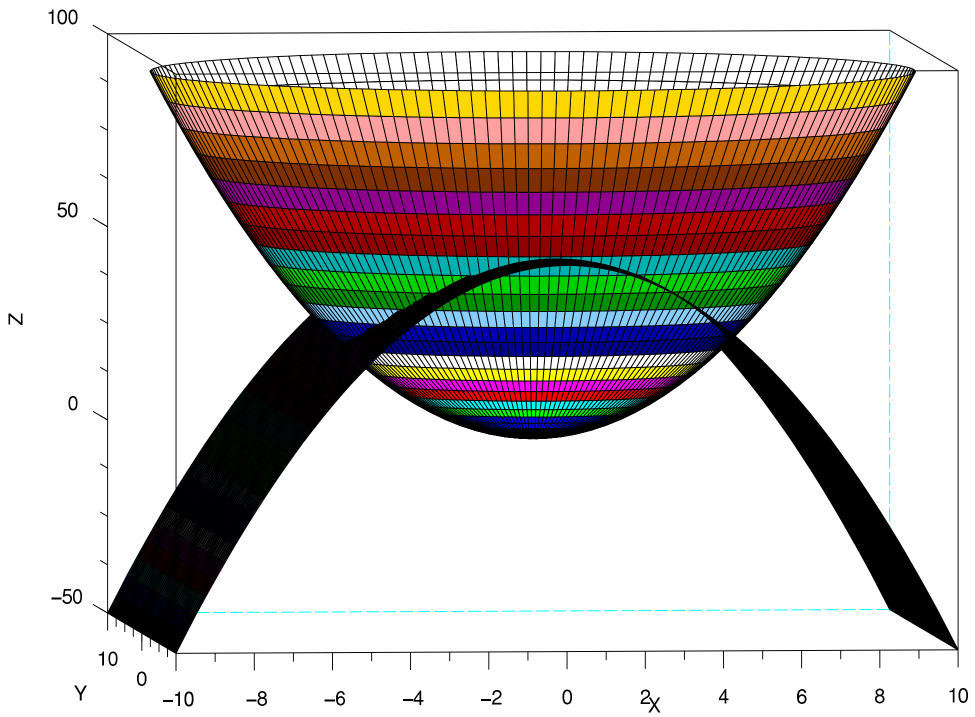
$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 5\sqrt{2}$, $b = 5$ und den Mittelpunkt $(0, 0)$ dar.

Hinweis: Die allgemeine Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt $(x_0.y_0)$ und den Halbachsen $a$, $b$ lautet $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

Addition der beiden Gleichungen von (1) liefert die Projektion in die $x, z$-Ebene. Wir erhalten $x^2 + 50 = 2z$ bzw.$z = \frac{x^2}{2} + 25$ mit $|x| \leq 5\sqrt{2}$. Damit ist die Projektion in die $x, z - Ebene$ eine Parabel.

Die Projektion in $y, z$-Ebene wird trivialerweise durch den Zylinder $P_1$ gegeben, also wieder eine Parabel $z = 50 - y^2$ mit $|y| \leq 5$. Nachfolgender Plot soll den Sachverhalt verdeutlichen.




— bitte wenden —

**Lösung zu Aufgabe H3**

(a) Zu zeigen ist, daß $h$ injektiv ist, d.h. also für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt, daß aus $x_1 \neq x_2$ auch $h(x_1) \neq h(x_2)$ folgt.

Seien jetzt $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gegeben. Da nach Voraussetzung $f$ injektiv ist gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Da aber auch $g$ injektiv ist folgt $g(y_1) \neq g(y_2)$ mit $y_1 = f(x_1)$, $y = f(x_2)$. Nach der Definition der Komposition bedeutet dies aber gerade $h(x_1) \neq h(x_2)$, also die Injektivität.

(b) Der Begriff **bijektiv** bedeutet **injektiv** und **surjektiv**. Damit sind $f$ und $g$ injektiv und mit Teil (a) folgt, daß $h$ auch injektiv ist. Es muß nur noch die Surjektivität von $h$ gezeigt werden, diese folgt aus der Surjektivität von $f$ und $g$. Es ist zu zeigen, daß der Bildbreich von $h$ gerade $Z$ ist.

Zu jeden $z \in Z$ existiert ein $x \in X$ mit $h(x) = z$. Für beliebiges $z$ und der Tatsache, daß $g$ surjektiv ist, gibt es ein $y \in Y$ mit $z = g(y)$. Da aber auch $f$ surjektiv ist gibt es zu diesem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Zusammengefaßt bedeutet dies $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, also $h$ ist surjektiv und damit auch bijektiv.

**Lösung zu Aufgabe H4**

(a) Wir bestimmen die zuerst Definitionsbereiche der drei Abbildungen $f_i$, $i = 1, 2, 3$. Wir sehen, daß $f_1$ und $f_2$ nicht definiert sind wenn die jeweiligen Nenner verschwinden, denn $\frac{1}{0}$ und $\frac{x+1}{0}$ sind nicht definiert. Dies geschieht für $x = 2$ also haben wir $D_1 = \mathbb{R}\backslash\{1\} = D_2$. Da $f_3$ ein quadratisches Polynom ist, ist der zugehörige Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$, also haben wir $D_3 = \mathbb{R}$.

Wir wissen, daß für die Bildmenge gilt $R(f_i) = f_i(D_i), i = 1, 2, 3$. Zur Bestimmung der Bildmengen zerlegen wir die Abbildungen $f_i$, $i = 1, 2, 3$ derart, daß sie sich aus einfacheren Abbildungen zusammensetzen.

(i) Die Abbildung $f_1$ lässt als $f_1 = s \circ t$ darstellen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ x &\mapsto \frac{1}{x}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t : \mathbb{R}\backslash\{2\} &\to \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ x &\mapsto x - 2. \end{aligned}$$

Die Zerlegung von $f_1$ in $s$ und $t$ ist erlaubt, da wir den Definitionbereich von $t$ auf $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ einschränken und damit der Bildbereich $R(t) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist, worauf $s$ definiert ist. Das Bild $R(f_1)$ berechnet sich dann als

$$\mathbf{R(f_1)} = f_1(D_1) = f_1(\mathbb{R}\backslash\{2\}) = s(t(\mathbb{R}\backslash\{2\})) = s(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}.$$

(ii) Die Abbildung $f_2$ schreiben wir wie folgt um:

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x-2} = \frac{x+1+2-2}{x-2} = \frac{3+x-2}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2} = 1 + 3f_1(x)$$

— bitte wenden —

Damit schreiben wir $f_2$ als $f_2 = q \circ r \circ f_1 = q \circ r \circ s \circ t$ mit

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 + x, \qquad\qquad x \mapsto 3x.$$

Damit erhalten wir für den Bildbereich von $f_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R(f_2)} &= f_2(D_2) = f_2(\mathbb{R}\backslash\{2\}) = q \circ r \circ s \circ t(\mathbb{R}\backslash\{2\}) \\ &= q \circ r \circ s(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = q \circ r(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = q(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \\ &= \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{1}\}. \end{aligned}$$

(iii) Wir schreiben $f_3(x) = x^2+x+1$ durch quadratische Ergänzung als $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$. Damit kann $f_3$ als Verknüpfung der Abbildungen $u$, $v$, $w$ dargestellt werden, also $f_3 = u \circ v \circ w$ mit

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + \frac{7}{4}, \qquad x \mapsto x^2, \qquad x \mapsto x + \frac{1}{2}.$$

Damit erhalten wir für den Bildbereich von $f_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R_3} &= f_3(D_3) = u \circ v \circ w(\mathbb{R})) = u \circ v(\mathbb{R}) \\ &= u(\{x \in \mathbb{R} | \ x \geq 0\}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} | \ \mathbf{x} \geq \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\}. \end{aligned}$$

(b) (i/ii) Die Abbildungen $f_1$ und $f_2$ sind injektiv, den aus $x \neq y$ folgt $f_i(x) \neq f_i(y)$, $i = 1, 2$. Da $f_1 = 1 + 3f_2$ genügt es die Injektivität von $f_1$ zu zeigen. Seien also $x, y \in D(f_1)$ mit $x \neq y$. Zuerst sei $x < y$ dann folgt $f(x) = \frac{1}{x-2} < \frac{1}{y-2} = f(y)$ also $f_1(x) \neq f_1(y)$. Analog gilt fr $x > y$ daß $f_1(x) = \frac{1}{x-2} > \frac{1}{y-2} = f_1(y)$, also auch $f_1(x) \neq f_1(y)$, folglich ist $f_1$ injektiv.

(iii) $f_3$ ist nicht injektiv. Dazu nehmen wir an, daß $f_3(x) = f_3(y)$ ist. Daraus folgt, daß $(x+\frac{1}{2})^2 = (y+\frac{1}{2})^2$ ist. Ausgerechnet ergibt dies $x(x+1) = y(y+1)$. Diese Gleichung ist erfüllt für $x = y = 0$ und $x = y = -1$. Der zugehörige Wert von $f_3$ ist $f_3(0) = 2 = f_3(-1)$. Also folgt aus $x \neq y$ die Beziehung $f(x) = f(y)$. Also ist $f_3$ nicht injektiv.

(c) Wir wissen aus der Vorlesung, daß für die inverse Abbildung gilt $f \circ f^{-1} = id$. Wenn jetzt $f$ die Komposition zweier Abbildungen $g$ und $h$ ist , also $f = g \circ h$, dann berechnet sich die inverser Abbildung $f^{-1}$ als $f_{-1} = h^{-1} \circ g{-}1$. Damit erhalten wir für die inversen Abildungen von $f_1$ und $f_2$:

$$f_1^{-1} = (s \circ t)^{-1} = t^{-1} \circ s^{-1}, \ f_2^{-1} = (q \circ r \circ s \circ t)^{-1} = t^{-1} \circ s^{-1} \circ r^{-1} \circ q^{-1}$$

.

— bitte wenden —

Zur praktischen Berechung der Umkehrabbildungen $f_i^{-1}$, $i = 1,2$ lösen wir die Gleichungen von $f_i$, $i = 1,2$ nach $x$ auf. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow f_1(x)(x-2) = 1 \Leftrightarrow f_1(x)x = 1 + 2f_1(x) \Leftrightarrow x = \frac{1+2f_1(x)}{f_1(x)} \\
f_2(x) &= 1 + \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow f_2(x) - 1 = \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow (f_2(x)-1)(x-2) = 3 \\
&\Leftrightarrow (f_2(x)-1)x - 2(f_2(x)-1) = 3 \Leftrightarrow (f_2(x)-1)x - 2(f_2(x)) + 2 = 3 \\
&\Leftrightarrow (f_2(x)-1)x - 2(f_2(x)) = 1 \Leftrightarrow (f_2(x)-1)x = 1 + 2f_2(x) \Leftrightarrow x = \frac{1+2f_2(x)}{f_2(x)-1}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Umkehrabbildungen

$$f_1^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x}, \; f_2^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x}.$$