UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
17. November 2006

Lösungen zum 3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Einige wichtige Defintionen:

Definition: Beschränktheit
Eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt **beschränkt nach oben (beschränkt nach unten)**, falls eine reelle Zahl K (bzw k) existiert, so daß gilt

$$x \leq K \text{ für alle } x \in M \text{ (bzw. } k \leq x \text{ für alle } x \in M)$$

M heißt **beschränkt**, falls M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist. K wird dabei **obere Schranke** und k **untere Schranke** von M genannt.

Definition: Kleinste obere Schranke, größte untere Schranke
M sei eine nichtleere Menge reeller Zahlen. Ist die reele Zahl Γ obere Schranke von M derat, daß jede reelle Zahl $\tilde{\Gamma}$ mit $\tilde{\Gamma} < \Gamma$ keine obere Schranke von M ist, so heißt Γ **kleinste obere Schranke** oder **obere** Schranke oder Supremum von M.

Schreibweise: $\Gamma = \sup M = \sup\limits_{x \in M} x$.

Ist entsprechend $\gamma \in \mathbb{R}$ untere Schranke derart, daß jede reelle Zahl $\tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma} > \gamma$ keine untere Schranke ist, so heißt γ **größte untere Schranke** oder **untere Schranke** oder **Infimum** von M.

Schreibweise: $\gamma = \inf M = \inf\limits_{x \in M} x$.

Vollständigkeitaxiom: Jede nichtleere Menge reeller Zahlen, die nach oben (unten) beschränkt ist, besitzt ein Supremum (Infimum).

Definition: Maximum, Minimum
M sei eine nichtleere Menge reeller Zahlen. Sei $\Gamma = \sup M$ und gilt zusätzlich $\Gamma \in M$, so heißt Γ **größte Element** oder **Maximum** von M.

Schreibweise: $\Gamma = \max M = \max\limits_{x \in M} x$.

Sei $\gamma = \inf M$ und gilt zustzlich $\gamma \in M$, so heißt γ **kleinstes Element** oder **Minimum** von M.

Schreibweise: $\gamma = \min M = \min\limits_{x \in M} x$.

Lösung zu Aufgabe H1 Zunächst zum Supremum: Da A und B beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A+B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A+B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A+B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.
Wählen wir ein beliebiges $x \in A+B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a+b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \leq \alpha$ und $b \leq \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leq \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $A + B \leq \alpha + \beta$ ist, d. h. $A+B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.
Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $< \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$.
Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A+B$ sein.
Nun zum Infimum. Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A+B$ nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung wissen wir, wie man bei beschränkten Mengen das Infimum als ein Supremum schreiben kann:

$$\begin{aligned}\inf(A+B) &= -\sup\big(-(A+B)\big) = -\sup\big((-A)+(-B)\big) = -\big(\sup(-A)+\sup(-B)\big)\\ &= -\big(-\inf A + (-\inf B)\big) = \inf A + \inf B.\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe H2

(a) Die Menge A ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke, so müsste

$$\forall x \in (0, 42]: \quad x + \frac{1}{x} \leq \Gamma$$

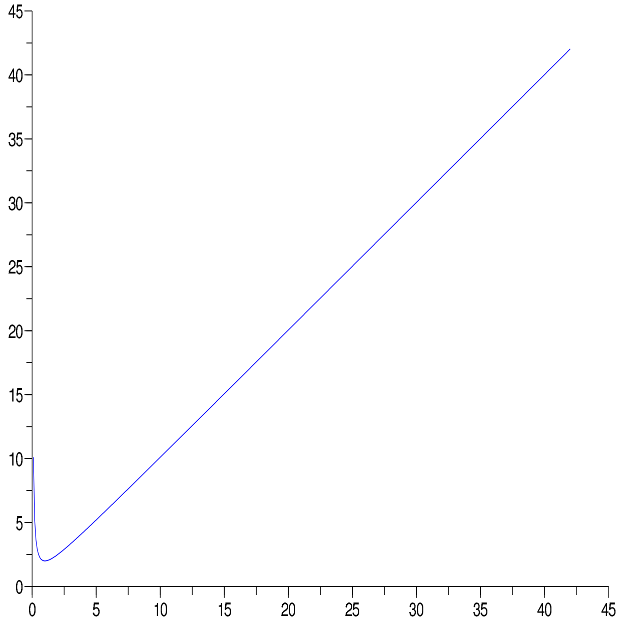
gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n}$ einsetzen und erhielten: $\frac{1}{n} + n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von A. (Man kann allerdings schreiben: $\sup A = \infty$.)

Die Menge A ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad \leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in A$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von A sein. Also ist $\inf A = 2$ und wegen $2 \in A$ folgt auch $\min A = 2$.

— bitte wenden —



(b) Offenbar gilt $x^2(1+x^2)^{-1} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in B$ (man setze $x = 0$) und damit folgt: Infimum und Minimum von B existieren, es ist $\inf B = \min B = 0$.

Die Menge B ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad x^2 \leq 1 + x^2$$

und die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von B ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

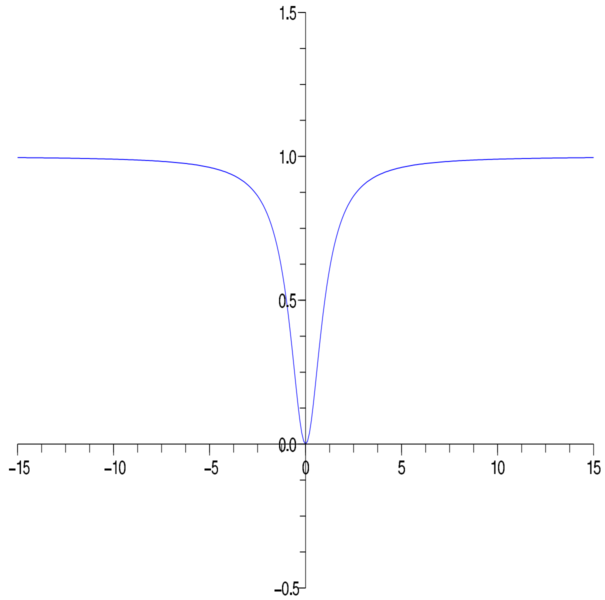
$$\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1+x^2), \quad \text{also} \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d. h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für hinreichend große x offenbar erfüllt.

— bitte wenden —



Lösung zu Aufgabe H3

Wir wiederholen nocheinmal kurz das Prinzip der **Vollständigen Induktion** (VI): Allgemeine Aussagen A_n, die von einer *abzählbaren Indexmenge* wie etwa die natürlichen Zahlen abhängen, kann man mit Hilfe der VI beweisen. Die VI lässt sich in fünf Schritte zerlegen

- **Induktionsanfang**: Die Aussage A_n wird für einen Anfangsindex $n = n_0$ bewiesen.
- **Induktionsannahme**:Die Aussage A_n sei für den Index $n = k \geq n_0$ bewiesen.
- **Induktionsbehauptung**: Wir nehmen nun an die Aussage A_n sei auch für $n = k + 1$ richtig. Dies wird im folgnenden Schritt bewiesen.
- **Induktionsbeweis**: Hier wird die Richtigkeit der Aussage A_n fr $n = k + 1$ bewiesen. Wie der Beweis durchgeführt wird hängt von der konkreten Fragestellung ab.
- **Induktionsschluß**: Hat man die Richtigkeit der Aussage A_n im Induktionsbeweis für $n = k + 1$ gezeigt, so folgert man, daß die Aussage A_n für alle Indizes $n \geq n_0$ gilt.

Hinweis: Die Schritte **Induktionsannahme, Induktionsbehauptung** und **Indukitionsbeweis, Induktionsschluß** werden meistens jeweils in den Schritten **Induktionsvoraussetzung** und **Induktionsschluß** zusammengefasst.

(a) Wir behaupten, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ der Ausdruck $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ durch 9 teilbar ist.

— bitte wenden —

- **Induktionbeginn:** Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, denn $1^3+2^3+3^3 = 1+8+27 = 36$ ist durch 9 teilbar.
- **Induktionannahme:** Für ein $k > 1$ sei $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ durch 9 teilbar.
- **Induktionbehauptung:** Dann ist auch $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ durch 9 teilbar.
- **Induktionbeweis:** Es gilt

$$\begin{aligned}(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 &= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 \\ &= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3)\end{aligned}$$

  Der Ausdruck $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ ist nach der Induktionsannahme durch 9 teilbar, während $9(k^2+3k+3)$ als Vielfaches von 9 ebensfall durch 9 teilbar ist. Also ist der gesamte Ausdruck durch 9 teilbar.
- **Induktionschluß:** $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist für alle $n \geq 1$ durch 9 teilbar.

(b) Wir müssen zeigen: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2$.

- **Induktionsanfang:** $n = 1 : \displaystyle\sum_{k=0}^{1} k^3 = 1 = \Big(\frac{1(1+1)}{2}\Big)$
- **Induktionsvoraussetzung:** Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 \qquad \textbf{(IV)}.$$

- **Induktionsschluß:** $n \longrightarrow n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \underbrace{=}_{\text{IV}} \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4(n+1)) = \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 \\ &= \Big(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Big)^2\end{aligned}$$

(c) Wir müssen zeigen, daß $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$ ist.

- **Induktionanfang:** Für $n = 1$ ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^1-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 > \frac{1}{2}$. Also ist die Behauptung für $n = 1$ richtig.
- **Induktionvoraussetzung:** Für ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ sei die Behauptung richtig, also

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2} \qquad \text{(IV)}.$$

— bitte wenden —

- **Induktionschluß:** $n \longrightarrow n+1$. Wir haben
$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \underbrace{>}_{\text{IV}} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k}$$
Jetzt müssen wir noch die Summe $\sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k}$ untersuchen. Der Laufindex k geht von 2^n bis $2^{n+1}-1$ also haben insgesamt $2^{n+1}-1-2^n+1$ Summanden. Weiter können wir sofort folgern, daß $2^{n+1} > k$ bzw. $\frac{1}{k} > \frac{1}{2^{n+1}}$ ist, damit erhalten wir
$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} > \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} 1 = \frac{2^{n+1}-1-2^n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$
Also haben wir
$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$
Damit ist die Behauptung bewiesen.

(d) Wir müssen zeigen, daß $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{k} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

- **Induktionsanfang:** Für $n = 1$ ist die Aussage $\frac{1}{2} + \cos(x) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{2\sin(\left(\frac{x}{2}\right)}$ richtig. Dies sieht man wie folgt:

  Man betrachtet den Ausdruck $\left(\frac{1}{2} + \cos(x)\right) 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Jetzt nutzt man die Tatsache (s. Hinweis $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$ mit $\alpha = \frac{x}{2}$ und $\beta = x$), daß $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x) = \sin\left(-\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}x\right)$ ist. Daraus folgt dann
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} + \cos(x)\right) 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x) \\
&= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(-\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \\
&= \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}x\right) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right).
\end{aligned}$$
  Division durch $2\sin\left(\frac{x}{2}x\right)$ liefert
$$\frac{1}{2} + \cos(x) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{2\sin(\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

- **Induktionsvoraussetzung:** Die Aussage sei für ein beliebiges $n \geq 1$ richtig, d.h.
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \textbf{(IV)}$$

- **Induktionsschluß:** $n \longrightarrow n+1$. Wir betrachten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n+1}\cos(kx) &= \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)+cos((n+1)x)\\
&\underbrace{=}_{\text{IV}} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}+\cos((n+1)x)\\
&= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+2\cos((n+1)x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Wieder benutzen wir die Tatsache, daß $2\sin(\alpha)\cos(\beta)=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$ mit $\alpha=\dfrac{x}{2}$ und $\beta=(n+1)x$ Daraus ergibt sich für den Zähler der obigen Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+2\cos((n+1)x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\\
=\ &\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+\left\{\sin\left(\left(\frac{1}{2}-(n+1)\right)x\right)+\sin\left(\left(\frac{1}{2}+(n+1)\right)x\right)\right\}\\
=\ &\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+\sin\left(-\frac{2n+1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{2n+3}{2}x\right)\\
=\ &\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)-\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{2n+3}{2}x\right)\\
=\ &\sin\left(\frac{2n+3}{2}x\right).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n+1}\cos(kx)=\frac{\sin\left(\frac{2n+3}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Somit gilt die obige Behauptung für alle $n \geq 1$.

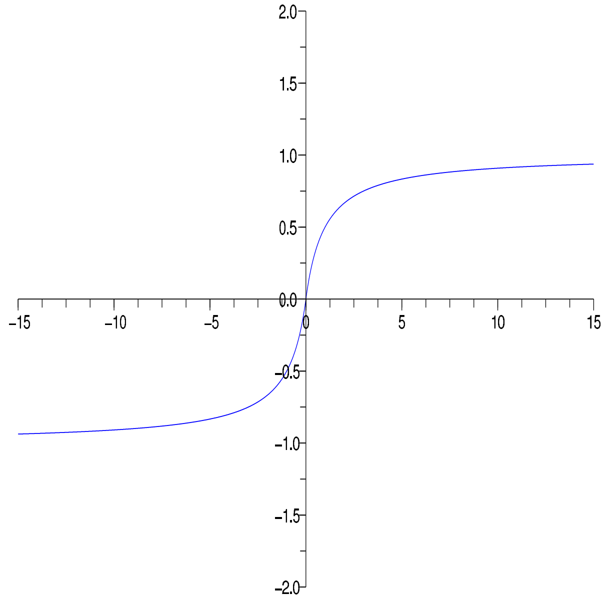
Lösung zu Aufgabe H4 Zuerst erinnern wir uns an die Definition der Betragsfunktion

$$|x| := \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0\\ -\ x \text{ für } x < 0\end{cases}.$$

Damit erhalten wir für die Funktion $h(x)$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} = 1-\dfrac{1}{1-x}, & \text{für } x \geq 0\\ \dfrac{x}{1-x} = -1+\dfrac{1}{1-x}, & \text{für } x < 0\end{cases}.$$

Zur Vereinfachung der nachfolgenden Untersuchungen betrachten wir das Schaubild der Funktion $h(x)$.



(a) (i) **Monotonie:** Wir stellen die Behauptung auf, daß $h(x)$ eine streng monoton wachsende Funktion ist, d.h. wir müssen zeigen wenn $x_1 < x_2$ dann folgt daraus $h(x_1) < h(x_2)$.

1.Fall: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-,\ x_1 < x_2$: Es sei $h(x_1) < h(x_2)$, daraus folgt

$$\begin{aligned} -1 + \frac{1}{1-x_1} < -1 + \frac{1}{1-x_2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - x_2 < 1 - x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 < x_2. \end{aligned}$$

2.Fall: Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ mit $x_1 < x_2$ sei $h(x_1) < h(x_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1+x_1} < 1 - \frac{1}{1+x_2} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1+x_1} < -\frac{1}{1+x_2} \\ &\Leftrightarrow \quad -(1+x_2) < -(1+x_1) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + x_2 > 1 + x_1 \Leftrightarrow x_1 < x_2. \end{aligned}$$

3.Fall: Für $x_1 \in \mathbb{R}^-$ und $x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ gilt stets $x_1 < x_2$. Da dann aber $h(x_1) < 0$ und $h_(x_2) \geq 0$ ist, folgt daraus $h(x_1) < h(x_2)$.

Also ist die Funktion h streng monoton wachsend.

(ii) **Beschränktheit:** Wie stellen die Behauptung auf, daß $|h(x)| < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

1.Fall: Für $x \in \mathbb{R}^-$ ist $h(x) = -1 + \frac{1}{1-x} > -1$, da $\frac{1}{1-x} > 0$ für $x \in \mathbb{R}^-$.

2.Fall: Für $x \in \mathbb{R}_0^+$ ist $h(x) = 1 - \frac{1}{1+x} < 1$, da $\frac{1}{1+x} > 0$ für $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Also ist $h(x)$ eine beschränkte Funktion.

— bitte wenden —

(iii) **Bijektivität:** Wir müssen die Injektivität und Surjektivität zeigen.

Injektivität: Die Injektivität von h folgt aus der strengen Monotonie, denn aus $x_1 \neq x_2$ folgt stets $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Surjektivität: Für alle $y \in (-1,1)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, so daß $y = h(x)$ gilt:

1.Fall: Für $x \in \mathbb{R}^-$ ist $y \in (-1,0)$:

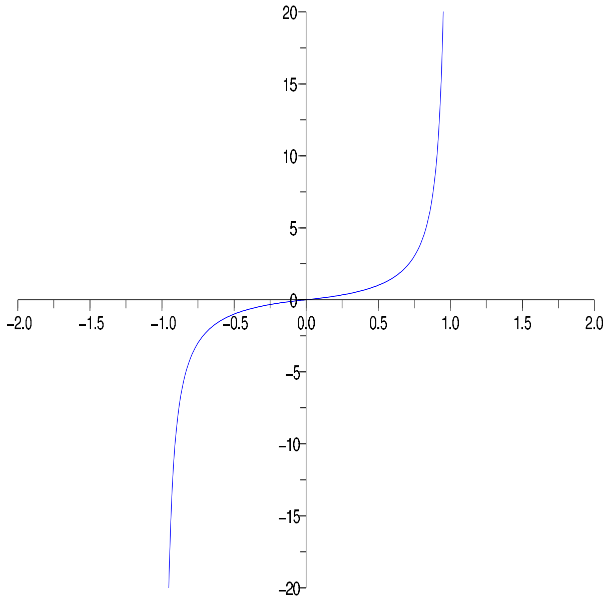
$$y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow y - xy = x \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y} = \frac{y}{1-|y|}.$$

2.Fall: Für $x \in \mathbb{R}_0^+$ ist $y \in [0,1)$:

$$y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y + xy = x \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} = \frac{y}{1-|y|}.$$

Also bildet die Funktion h den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ umkehrbar eindeutig auf das Intervall $(-1,1)$ ab.

Die zugehörige Umkehrfunktion $h^{-1}: \; (-1,1) \to \mathbb{R}$ ist $h^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$.



(b) Aus Teil (a) wissen wir, daß die Funktion h, die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bijektiv auf $(-1,1)$ abbildet. Wir suchen jetzt eine weitere Funktion g, die das Intervall $(-1,1)$ bijektiv auf das Intervall $(0,1)$ abbildet, dann ist die gesuchte Abbildung die Komposition $g \circ h$, also $g \circ h : \mathbb{R} \to (0,1)$.

Die Frage ist, wie die Funktion g zu bestimmen ist. Der einfachste Typus bijektiver Funktion sind Geraden. Also machen wir den Ansatz $y = g(x) = \alpha x + \beta$, denn eine Gerade bildet allgemein ein Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ bijektiv auf ein Intervall $(c,d) \subset \mathbb{R}$ ab. Dabei wird jeweils die untere (obere) Intrevallgrenze auf die untere

— bitte wenden —

(obere) Intervallgrenze abgebildet. Daraus erhält man das folgende Gleichungssystem für die Parameter α und β von g:

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta &= c \\ \alpha b + \beta &= d. \end{aligned}$$

Die Werte $a = -1, b = 1, c = 0, d = 1$ eingesetzt ergibt,

$$\begin{aligned} -\alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \beta &= 1 \end{aligned}$$

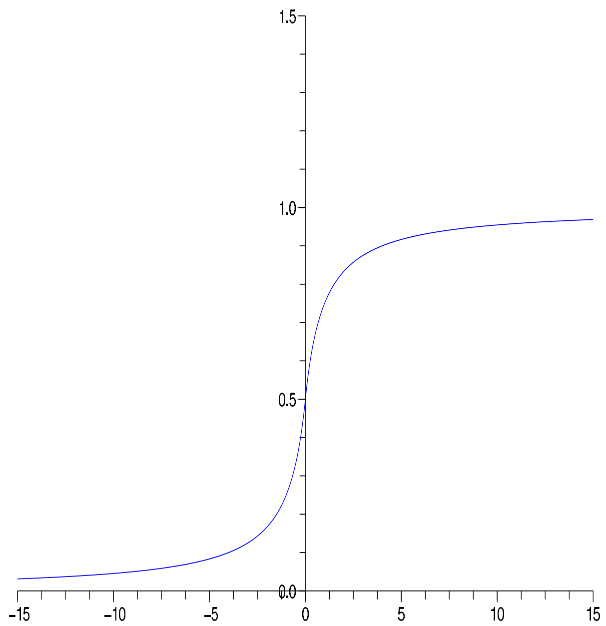
Als Ergebnis bekommt man $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Also lautet die gesuchte Geradengleichung

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Die gesuchte Abbildung erhalten wir durch Verknüpfung mit h. Mittels

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{1}{2}\frac{x}{1+|x|} + \frac{1}{2}, \; x \in \mathbb{R}$$

wird $\mathbb{R}$ bijektiv nach $(0, 1)$ abgebildet.



— bitte wenden —