Lösung zu Aufgabe T1 Da A nach unten beschränkt ist (durch 0), existiert $\alpha := \inf A$. Nach Voraussetzung ist $\alpha > 0$ und wir müssen nun zeigen, dass $\alpha^{-1} = \sup B$ gilt. Es sind also zwei Dinge zu beweisen: Zum einen, dass α^{-1} eine obere Schranke von B ist; zum anderen, dass α^{-1} sogar die *kleinste* obere Schranke ist.
Da α eine untere Schranke von A ist, gilt $\alpha \leq a$ für alle $a \in A$. Multiplikation mit $a^{-1}\alpha^{-1}$ (dies ist eine positive Zahl) liefert $a^{-1} \leq \alpha^{-1}$ für alle $a \in A$. Ist nun $x \in B$ beliebig, so gilt $x = a^{-1}$ für ein $a \in A$; es ist also $x \leq \alpha^{-1}$. Damit ist klar, dass B durch α^{-1} nach oben beschränkt ist.
Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist, dass also kein $\Gamma < \alpha^{-1}$ obere Schranke von B ist. Es ist klar, dass kein $\Gamma \leq 0$ obere Schranke von B sein kann, da B nur positive Zahlen enthält. Sei also $0 < \Gamma < \alpha^{-1}$ beliebig. Dann folgt $\Gamma^{-1} > \alpha = \inf A$ und da α die *größte* untere Schranke von A ist, muss es ein $a \in A$ mit $a < \Gamma^{-1}$ geben. Dies bedeutet aber wiederum $a^{-1} > \Gamma$ und wegen $a^{-1} \in B$ ist damit Γ keine obere Schranke von B.

Lösung zu Aufgabe T2 Wir geben nochmals kurz die Gruppendefinition an:

Es sei A eine Menge und $\circ$ eine Verknüpfung auf A. $(A, \circ)$ heißt **Gruppe**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(a) $(A, \circ)$ ist eine Halbgruppe, d.h. es gilt das Assoziativgesetz.

(b) $(A, \circ)$ besitzt ein neutrales Element $e \in A$, d.h. für $x \in A$ gilt: $x \circ e = e \circ x = x$.

(c) Zu jedem $x \in A$ gibt es ein inverses Element x^{-1}, d.h. $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

Die Gruppe $(A, \circ)$ heißt **abelsch**, wenn die zugehörige Halbgruppe $(A, \circ)$ kommutativ ist.

Wir müssen jetzt die Gruppenaxiome bzgl. der Verknüpfung $*$ nachprüfen mit

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

(a) **Assoziativgesetz:** Wir müssen zeigen:

$$(a_1, a_2) * [(b_1, b_2) * (c_1, c_2)] = [(a_1, a_2) * (b_1, b_2)] * (c_1, c_2).$$

Unter Ausnutzung der Definition der Verknüpfung $*$ erhalten wir für die linke Seite der letzten Gleichung:

$$\begin{aligned}
& (a_1, a_2) * [(b_1, b_2) * (c_1, c_2)] \\
= \; & (a_1, a_2) * (b_1 c_1 - b_2 c_2, b_1 c_2 + b_2 c_1) \\
= \; & (a_1(b_1 c_1 - b_2 c_2) - a_2(b_1 c_2 + b_2 c_1), (a_1(b_1 c_2 + b_2 c_1) + a_2(b_1 c_2 + b_2 c_1)) \\
= \; & (a_1 b_1 c_1 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1, a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Distributivität der Muliplikation ausgenutzt.

— bitte wenden —

Für die rechte Seite der Behauptung gilt wieder unter Ausnutzung des Distributivgesetzes der Multiplikation:

$$\begin{aligned}
& [(a_1, a_2) * (b_1, b_2)] * (c_1, c_2) \\
= \ & (a_1 b1 - a_2 b2, a_1 b_2 + a_2 b_1) * (c_1, c_2) \\
= \ & (a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_1 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2, a_1 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1)
\end{aligned}$$

Die Gleichheit der beiden Seiten ergibt sich jetzt durch die Kommutativität der Addition. Also genügt die Verknüpfung $*$ dem Assoziativgesetz.

Damit ist $(\mathbb{R}^2, *)$ eine Halbgruppe.

(b) **Neutrales Element bzgl. $*$:** Gesucht ist ein Element $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$, so daß $(e_1, e_2) * (a_1, a_2) = (a_1, a_2)$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ist. Nach der Definition der Verknüpfung $*$ erhalten wir

$$(e_1, e_2) * (a_1, a_2) = (e_1 a_1 - e_2 a_2, e_1 a_2 + e_2 a_1) = (a_1, a_2)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
e_1 a_1 - e_2 a_2 &= a_1 \\
e_1 a_2 - e_2 a_1 &= a_2.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt $e_1 = 1$ und $e_2 = 0$. Also ist $(e_1, e_2) = (1, 0)$ das neutrale Element.

(c) **Inverses Element bzgl. $*$:** Gesucht ist ein Element $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, so daß bzgl. der Verknüpfung $*$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, für die dies möglich ist, gilt

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (e_1, e_2)).$$

Wir bezeichnen dann $(b_1, b_2) := (a_1, a_2)^{-1}$.

Mit dem neutralen Element $(e_1, e_2) = (1, 0)$ und der Definition der Verknüpfung $*$ erhalten wir

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) = (e_1, e_2) = (1, 0)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 - a_2 b_2 &= 1 \\
a_1 b_2 - a_2 b_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit a_1, der zweiten Gleichung mit a_2 und anschließende Addition der beiden Gleichungen liefert

$$a_1^2 b_1 + a_2^2 b_1 = a_1 \Leftrightarrow (a_1^2 + a_2^2) b_1 = a_1 \Leftrightarrow b_1 = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \ \forall (a_1, a_2) = (0, 0).$$

Das Ergebnis für b_1 in die zweite Gleichung eingesetzt liefert

$$a_1 b_2 + a_2 \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} = 0 \Leftrightarrow b_2 = -\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}.$$

Damit ist für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ das zur Verknüpfung $*$ inverse Element als $(a_1, a_2)^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, b_2 = -\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)$ gegeben.

Damit ist $(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, *)$ eine Gruppe.

(d) **Kommutativgesetz:** Unter Ausnutzung der Kommutativität der Multiplikation und Addition reeller Zahlen erhalten wir

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) * (b_1, b_2) &= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)\\ &= (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_2 a_1 + b_1 a_2)\\ &= (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_1 a_2 + b_2 a_1)\\ &= (b_1, b_2) * (a_1, a_2).\end{aligned}$$

Folglich gehorcht die Verknüpfung $*$ dem Kommuativgesetz.

Damit ist $(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, *)$ eine abelsche Gruppe.

Lösung zu Aufgabe T3 Wir zeigen mit Hilfe der vollständigen Induktion

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Wir zeigen die Aussage zunächst für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$

(i) **Induktionsanfang:**

- $*$ Für $k = 0$ gilt ist Aussage offensichtlich.
- $*$ Für $k = 1$, d.h. $n = 1$ gilt $\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$ nach der Vorlesung.

(ii) **Induktionsvoraussetzung:** Für ein $k \geq 0$ gelte

$$\sqrt[2^k]{\prod_{i=1}^{2^k} a_i} \leq \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{2^k} a_i \qquad \textbf{(IV)}$$

(iii) **Induktionsschluß:**$2^k \to 2^{k+1}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[2^{k+1}]{\prod_{i=1}^{2^{k+1}} a_i} &= \sqrt{\sqrt[2^k]{\prod_{i=1}^{2^{k+1}} a_i}} = \sqrt{\sqrt[2^k]{\prod_{i=1}^{2^k} a_i}\ \sqrt[2^k]{\prod_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i}}\\ &= \sqrt{\sqrt[2^k]{\prod_{i=1}^{2^k} a_i}\ \sqrt[2^k]{\prod_{i=2^k+1}^{2\cdot 2^k} a_i}} = \sqrt{\sqrt[2^k]{\prod_{i=1}^{2^k} a_i}\ \sqrt[2^k]{\prod_{i=2^k+1}^{2^k+2^k} a_i}}\\ &\underbrace{\leq}_{\text{IV}} \sqrt{\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k} a_i \cdot \frac{1}{2^k}\sum_{i=2^k+1}^{2^k+2^k} a_i}\\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k}\Big(\sum_{i=1}^{2^k} a_i + \sum_{i=2^k+1}^{2^k+2^k} a_i\Big) = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=1}^{2^{k+1}} a_i\end{aligned}$$

— bitte wenden —

Dabei haben wir im vorletzten Rechenschritt ausgenutzt, daß $\sqrt{b_1 b_2} \le \frac{b_1 + b_2}{2}$ mit $b_1 = \sum_{i=1}^{2^k} a_i$ und $b_2 = \sum_{i=2^k+1}^{2^k+2^k} a_i$ gilt.

Also haben wir die Aussage für $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.

Im nächsten Schritt zeigen wir die Aussage für beliebige n. Wir haben als Induktionsvoraussetzung

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{(IV)}$$

und schließen jetzt von $n \to n-1$, wobei wir annehmen, daß $n = 2^k$ ist, denn dann ist $n-1$ für $k > 0$ keine Potenz von 2. (Beachte wir führen unseren Induktionschluß von n nach $n-1$ durch !)

Es gilt

$$\sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \;=\; \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{\frac{1}{n-1}}} \underbrace{\le}_{\text{IV}} \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i}\right)$$

Daraus folgt

$$(n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \le \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

bzw.

$$\sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \le \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

Damit ist die Aussage für alle naturlichen Zahlen bewiesen.

(b) Für $a \in (0,1)$ und $n \ge 1$ gilt die Ungleichung: $(1+a)^n < \frac{1}{1+na}$

(i) **Induktionsanfang:** Die Aussage ist für $n = 1$ richtig, d.h. es ist $1 - a < \frac{1}{1+a}$. Denn würde die Umkehrung gelten, d.h. aus $1 - a \ge \frac{1}{1+a}$ folgt $1 - a^2 \ge 1$, also $a^2 \le 0$. Dies kann aber nicht sein.

(i) **Induktionsvoraussetzung:** Die Aussage ist für ein beliebiges $n \ge 1$ gültig, d.h.

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na} \qquad \text{(IV).}$$

(i) **Induktionsschluß:** $n \to n+1$

$$\begin{aligned}(1-a)^{n+1} &= (1-a)^n(1-a) \underbrace{<}_{\text{IV}} \frac{1}{1+na}(1-a) \\ &= \frac{(1-a)(1+a)}{(1+na)(1+a)} = \frac{1-a^2}{1+(n+1)a+na^2} \\ &< \frac{1}{1+(n+1)a+na^2} < \frac{1}{1+(n+1)a}\end{aligned}$$

Also haben wir $(1-a)^{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)a}$. Womit die Behauptung bewiesen ist.

(c) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(i) **Induktionsanfang:** Für $n=1$ haben wir $\sum_{k=0}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

(i) **Induktionsvoraussetzung:** Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(IV)}.$$

(i) **Induktionsschluß:** $n \to n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \underbrace{=}_{\text{IV}} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe T4

(a) **1.Lösungsweg:** Es gilt nach der Definition des Betrages

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases},$$

das folgende

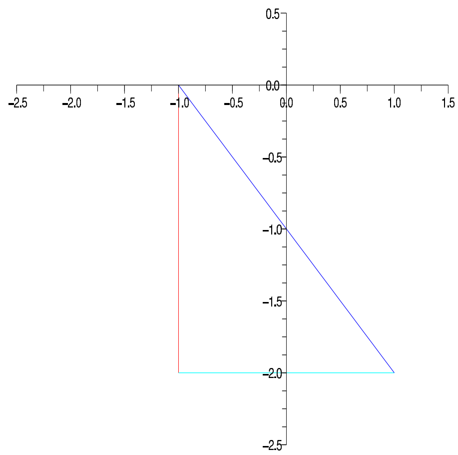
$$\begin{aligned}|x+1| &= \begin{cases} -\ (x+1) & \text{für} \quad -\infty < x < -1 \\ \ \ x+1 & \text{für} \quad -1 \leq x \leq \infty \end{cases}, \\ |y+2| &= \begin{cases} -\ (y+2) & \text{für} \quad -\infty < x < -2 \\ \ \ y+2 & \text{für} \quad -2 \leq y \leq \infty \end{cases}.\end{aligned}$$

Deshalb müssen wir vier Fälle untersuchen:

1.Fall: In der Viertelebene $x \geq -1,\ y \geq -2$ gilt:

$$x + 1 + y + 2 \leq 2 \quad \text{bzw.} \quad y \leq x - 1.$$

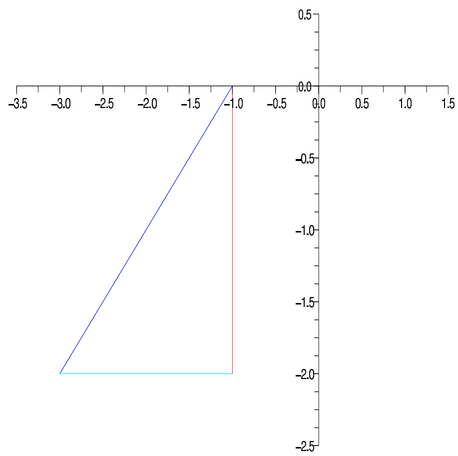
Diese Bedingungen werden von den inneren Punkten des untenstehend skizzierten Dreiecks erfüllt.



2.Fall: In der Viertelebene $x < -1,\ y \geq -2$ gilt:

$$-x - 1 + y + 2 \leq 2 \quad \text{bzw.} \quad y \leq x + 1.$$

Diese Bedingungen werden von den inneren Punkten des untenstehend skizzierten Dreiecks erfüllt.

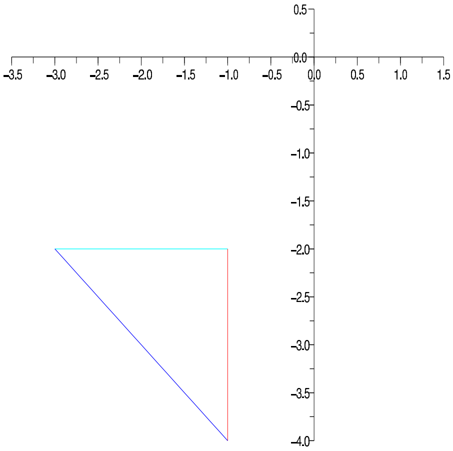


3.Fall: In der Viertelebene $x < -1,\ y < -2$ gilt:

$$-x - 1 - y - 2 \leq 2 \quad \text{bzw.} \quad y \geq -x - 5.$$

Diese Bedingungen werden von den inneren Punkten des untenstehend skizzierten Dreiecks erfüllt.

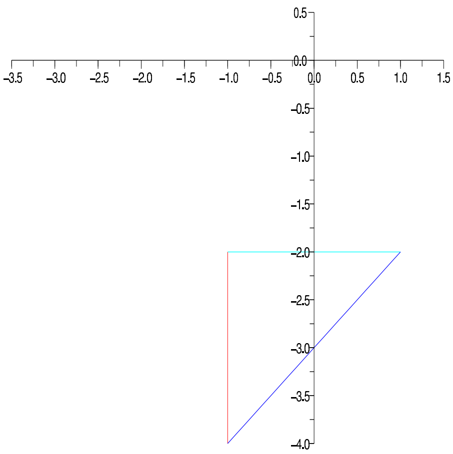
— bitte wenden —



4.Fall: In der Viertelebene $x \geq -1,\ y < -2$ gilt:

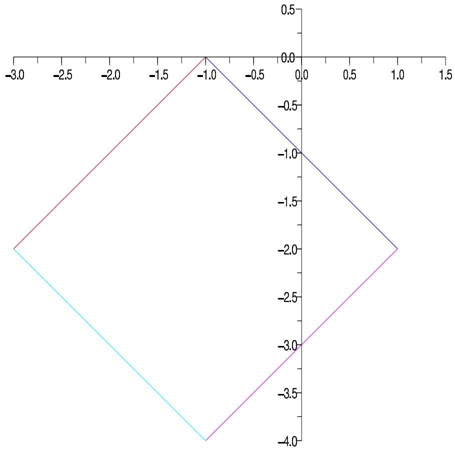
$$x + 1 - y - 2 \leq 2 \quad \text{bzw.} \quad y \geq x - 3.$$

Diese Bedingungen werden von den inneren Punkten des untenstehend skizzierten Dreiecks erfüllt.



Zusammenfassend erfüllt die Ungleichung $|x+1|+|y+2| \leq 2$ die Vereinigungsmenge der Dreiecke aus dem 1.Fall-4.Fall, was nachstehende Skizze verdeutlicht.

— bitte wenden —



(b) **2.Lösungsweg:** Durch die Translationen $u = x+1,\ x = u-1$ und $v = y+2,\ y = v-2$ überführen wir unser Problem

$$|x+1| + |y+2| \leq 2$$

auf das einfachere Problem

$$|u| + |v| \leq 2.$$

Die gesuchte Punktmenge ist symmetrisch zu den Koordinatenachsen in der u, v -Ebene. Es genügt also die Punktmenge im ersten Quadranten der $u, v-$Ebene zu untersuchen. Es gilt dort $u + v \leq 2$ bzw. $v \leq 2 - u$. Diese Punktmenge stellt im ersten Quadranten ein Dreieck dar, daß durch die Geraden $u = 0,\ v = 0$ und $v = 2 - u$ begrenzt wird. Spiegelung an der $u-$ und $v-$Achse liefert in der u, v-Ebene das Innere eines Quadrates, daß durch die vier Geraden $v = 2-u,\ v = 2-u, v = 2+u, v = -2+u$ begrenzt wird. Jetzt muß nur die Translation für u, v rückgängig gemacht werden und man erhält in der x, y-Ebene ein Quadrat, daß durch die vier Geraden $y = -x-1,\ y = y = x+1,\ y = -x-5,\ y = x-3$ begrenzt wird.