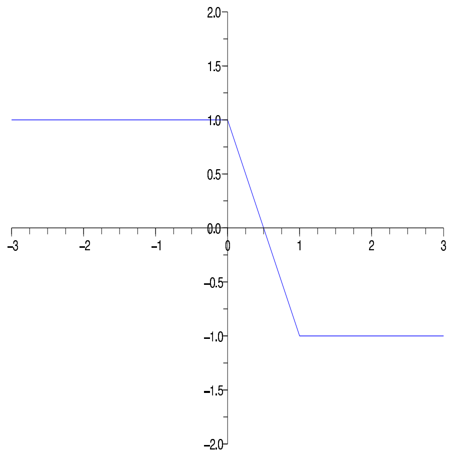
Lösung zu Aufgabe T1

(a) Der Term $x-1$ wechselt bei $x=1$ sein Vorzeichen, während x bei $x=0$ das Vorzeichen wechselt. Die Vorzeichen von $x-1$ und x bleiben also in den Intervallen $-\infty < x < 0$, $0 < x < 1$ und $1 < x < \infty$ unverändert. Deshalb erhalten wir das folgende Schema:

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Vorzeichen von x $\lvert x\rvert =$	negativ $-x$	positiv x	positiv x
Vorzeichen von $x-1$ $\lvert x-1\rvert =$	negativ $-(x-1)$	negativ -(x-1)	positiv x-1
$y = \lvert x-1\rvert - \lvert x\rvert =$	1	-2x+1	-1



(b) Für $x<0$ ist die Ungleichung offenbar erfüllt, denn dann steht links eine negative, rechts aber eine positive Zahl. Für $x=0$ steht auf beiden Seiten 0, die Ungleichung ist dann also nicht erfüllt. Untersuchen wir noch den Fall $x>0$; dann gilt

$$\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad\leftrightarrow\quad \frac{3}{1+x} < 4x \quad\leftrightarrow\quad 3 < 4x+4x^2$$
$$\leftrightarrow\quad 3 < (2x+1)^2-1 \quad\leftrightarrow\quad (2x+1)^2 > 4 \quad\leftrightarrow\quad |2x+1| > 2.$$

Dies ist erfüllt für $2x+1<-2$ oder $2x+1>2$, also $x<-\frac{3}{2}$ oder $x>\frac{1}{2}$. Im Fall $x>0$ ist die Ungleichung also genau für $x>\frac{1}{2}$ erfüllt.

Insgesamt: Die Ungleichung ist erfüllt für $x<0$ oder $x>\frac{1}{2}$.

(c) Wir quadrieren beide Seiten der Gleichung, denn diese sind ≥ 0.

$$|x-2|\cdot|x+2| = 2 \quad\leftrightarrow\quad \big((x-2)(x+2)\big)^2 = 4 \quad\leftrightarrow\quad (x^2-4)^2 = 4.$$

Die letzte Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x^2-4=2$ oder $x^2-4=-2$, d. h. für $x^2=6$ oder $x^2=2$. Die gegebene Gleichung hat somit die vier Lösungen $x_1=\sqrt{6}$, $x_2=-\sqrt{6}$, $x_3=\sqrt{2}$ und $x_4=-\sqrt{2}$.

— bitte wenden —

(d) Wegen $y^2 - x^2 = (|y| - |x|)(|y| + |x|)$ ist $|y| > |x|$ äquivalent zu $y^2 > x^2$. Folglich haben wir

$$|2x| > |6-2x| \quad \leftrightarrow \quad (2x)^2 > (6-2x)^2 \quad \leftrightarrow \quad 4x^2 > 36-24x+4x^2 \quad \leftrightarrow \quad 24x > 36.$$

Die Ungleichung ist also genau für $x > 36/24 = 3/2$ erfüllt.

Lösung zu Aufgabe T2 Wir erbringen den Beweis mittels vollständiger Induktion. Induktionsanfang: Für $n = 1$ steht links $(1 + t)$ und rechts

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} t^k = \binom{1}{0} t^0 + \binom{1}{1} t^1 = 1 + t,$$

denn $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ und $t^0 = 1$ (auch $0^0 = 1$). Für $n = 1$ ist die Formel also richtig. Induktionsschritt: Nun sei die Gleichung für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ bewiesen (Induktionsvoraussetzung, IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}
(1+t)^{n+1} &= (1+t)(1+t)^n \overset{\text{IV}}{=} (1+t)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k + \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}t^j = \binom{n}{0}t^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}t^k + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}t^j + \binom{n}{n}t^{n+1} \\
&= t^0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]t^k + t^{n+1}
\end{aligned}$$

und mit der aus der Vorlesung bekannten Gleichung $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ erhalten wir

$$= \binom{n+1}{0}t^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}t^k + \binom{n+1}{n+1}t^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}t^k,$$

womit die Induktionsbehauptung bewiesen ist.
Daraus können wir nun den binomischen Satz folgern: Für $x \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \big(x(1+y/x)\big)^n = x^n(1+y/x)^n = x^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(y/x)^k \\
&= x^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{-k}y^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.
\end{aligned}$$

Ist dagegen $x = 0$, so gilt

$$(x+y)^n = y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k,$$

weil in dieser Summe alle Summanden außer dem letzten 0 ergeben.

Lösung zu Aufgabe T3

(a) $(1+2i)(3+4i)(5+6i) = (3+4i+6i+8i^2)(5+6i) = (-5+10i)(5+6i) = -25-30i+50i+60i^2 = -85+20i.$

(b) $(3-2i)^3 = 3^3-3\cdot 3^2\cdot 2i+3\cdot 3\cdot(2i)^2-(2i)^3 = 27-54i+36i^2-8i^3 = 27-54i-36+8i = -9-46i.$

(c) $\dfrac{1+2i}{1-2i} = \dfrac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{1+4i-4}{1-4i^2} = \dfrac{-3+4i}{5} = -\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i.$

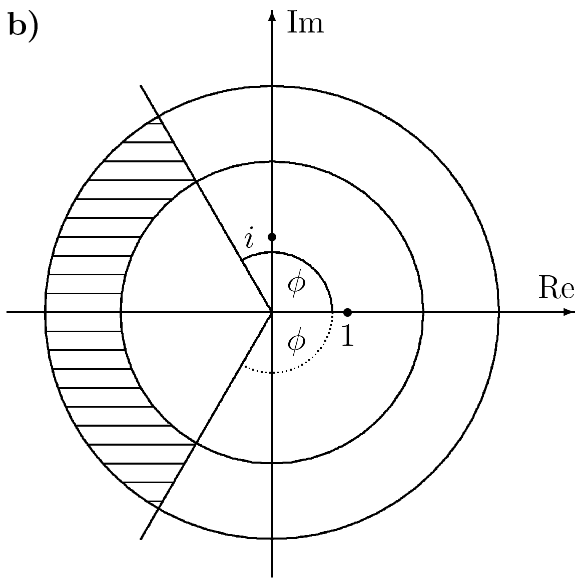
(d) $\dfrac{10}{4+3i}+\dfrac{5}{3-4i} = 10\dfrac{4-3i}{(4-3i)(4+3i)}+5\dfrac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{10}{25}(4-3i)+\dfrac{5}{25}(3+4i) = \dfrac{2}{5}(4-3i)+\dfrac{1}{5}(3+4i) = \dfrac{8-6i+3+4i}{5} = \dfrac{11-2i}{5} = \dfrac{11}{5}-\dfrac{2}{5}i.$

(e) $\dfrac{1+i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i} = \dfrac{1+i-1-i+1+i}{1+i} = \dfrac{1+i}{1+i} = 1.$

(f) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10} = \left(\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^{10} = \left(\dfrac{1-2i-1}{2}\right)^{10} = (-i)^{10} = i^{10} = -1$

Lösung zu Aufgabe T4

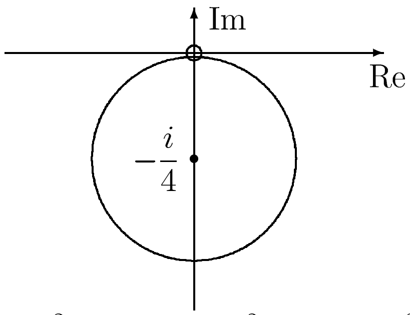
(a) Durch $2 < |z| < 3$ wird ein Kreisring um den Punkt 0 mit innerem Radius 2 und äußerem Radius 3 beschrieben. Durch die Bedingung für $\arg z$ wird daraus ein Sektor ausgeschnitten (siehe Skizze; $\phi = \frac{2}{3}\pi$); der Rand gehört diesmal nicht dazu.



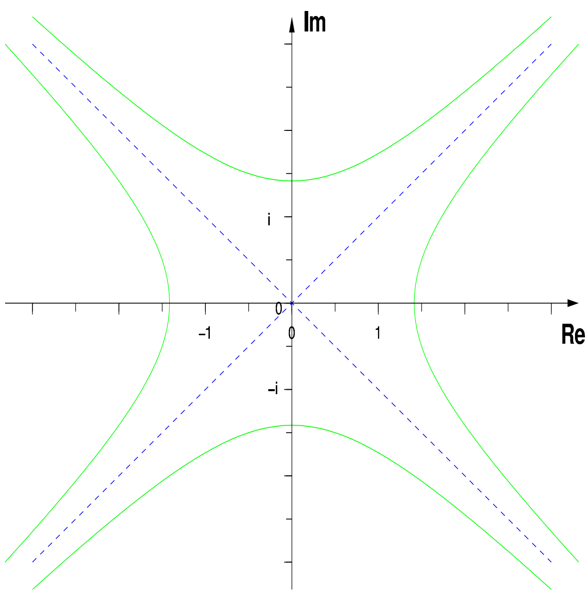
(b) Wegen $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar z}{z\bar z} = \dfrac{\bar z}{|z|^2} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ ist $Im\ \dfrac{1}{z} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Aus $Im\ \dfrac{1}{z} = 2$, d.h. $-\dfrac{y}{x^2+y^2} = 3$ folgt dann $2x^2+2y^2+y=0$ bzw. $x^2+y^2+\dfrac{1}{2}y = 0$. Quadratische Ergänzung liefert dann

$$x^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

Dies ist also ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(x_0, y_0) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ mit dem Radius $R = \frac{1}{4}$. Weiter muß beachtet werden, daß $\dfrac{1}{z}$ für $z = 0$ nicht definiert ist. Also muß der Punkt $z = 0$ aus dem Kreis herausgenommen werden.

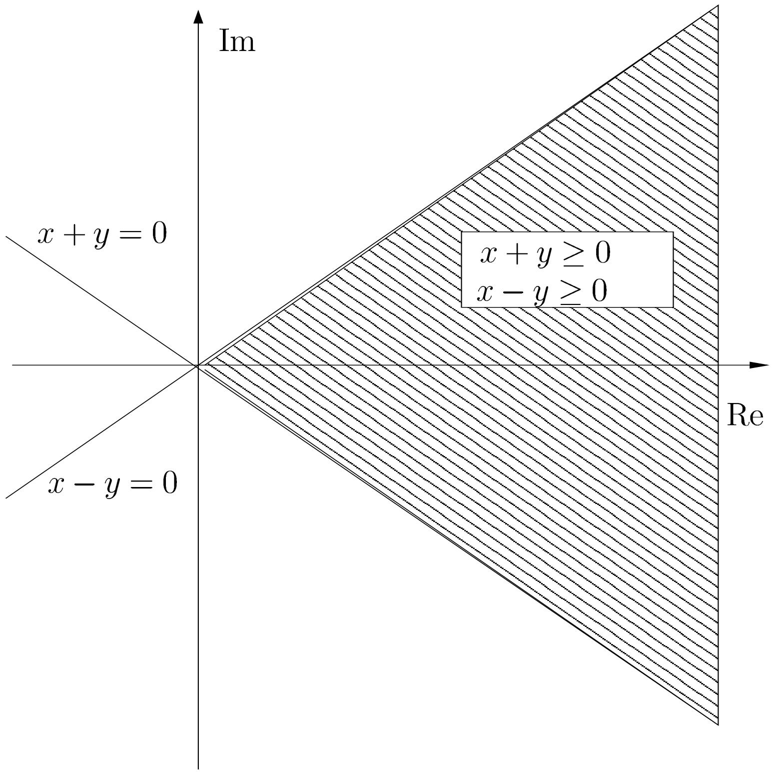


(c) Es ist $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ und $\bar{z}^2 = (x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$. Daraus folgt $z^2 + \bar{z}^2 = 2(x^2 - y^2) = 2\,Re\,z^2$. Damit ist $|z^2 + \bar{z}^2| \le 4 \Leftrightarrow |2(x^2-y^2)| \le 4$ bzw. $|x^2 - y^2| \le 2$. Der Ausdruck $|x^2 - y^2|$ ändert sein Vorzeichen nicht wenn x oder y das Vorzeichen wechseln. Damit ist die gesuchte Punktmenge symmetrisch zu den Koordinatenachsen. Weiter ändert der Ausdruck $|x^2 - y^2|$ sein Vorzeichen nicht, wenn x und y vertauscht werden. Also ist die gesuchte Punkte auch symmetrisch zu den Winkelhalbierenden der Quadranten. Damit genügt es im ersten Quadranten den Fall $y \ge x$ zu betrachten. Dann ist $|x^2 - y^2| \le 2$ äquivalent zu $y^2 - x^2 \ge 2$. Diese Ungleichung ist erfüllt für die Punkte, die auf oder unterhalb des Hyperbelastes $y^2 - x^2 = 2$ und auf und über der Winkelhalbierenden $y = x$ liegen. Durch Spiegelung an den Winkelhalbierenden und Koordinatenachsen erhält man die gesamte Punktmenge.

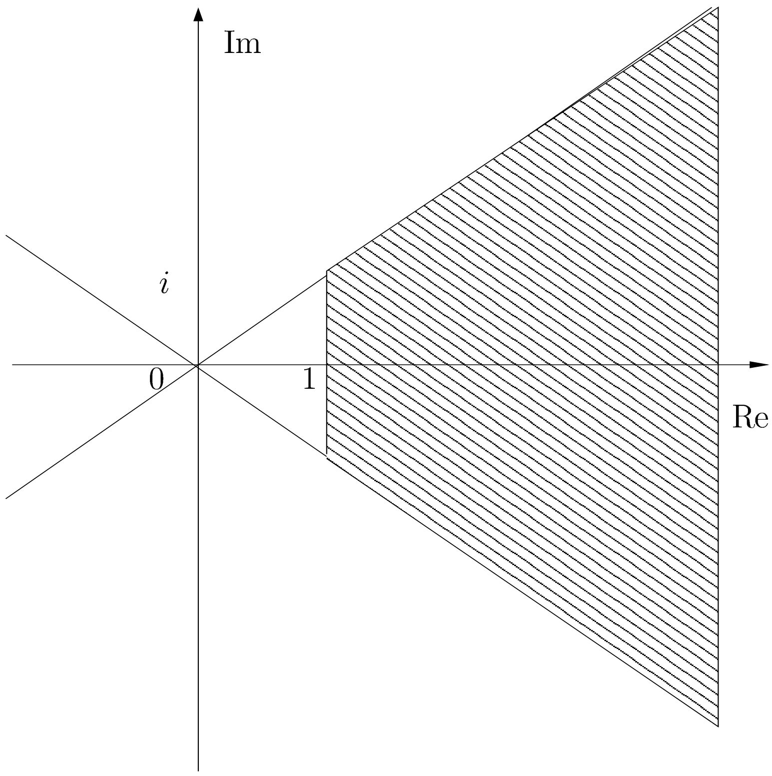


— bitte wenden —

(d) Es ist $(1+i)z = (1+i)(x+iy) = (x-y)+i(x+y)$. Daraus folgt $|Re\,(1+i)z| + Im\,(1+i)z = |x-y|+|x+y|$. Wir haben also die Unglreichung $|x-y|+|x+y| \geq 2$ zu untersuchen. Zur Vereinfachung unserer Untersuchung führen wir wieder Symmetriebetrachtungen durch. Der Ausdruck $x+y$ hat auf verschiedenen Seiten der Geraden $x+y=0$ verschiedene Vorzeichen. Das gleiche gilt für $x-y$ bzgl. der Geraden $x-y=0$. Der Ausdruck $|x-y|+|x+y|$ ist hingegen symmetrisch bzgl. dieser beiden Achsen. Es genügt also den Fall $x+y \geq 0$, $x-y \geq 0$ zu untersuchen und dann an diesen beiden Geraden zu spiegeln. Die Bedingung $x+y \geq 0,\ x-y \geq 0$ charakterisiert den unten skizzierten Winkelraum.



In diesem Winkelraum erhält man aus $|x-y|+|x+y| \geq 2$ die Bedingung $x \geq 1$.



Durch Spiegelung an den Winkelhalbierenden der Quadranten ergibt die gesuchte Punktmenge das Äußere des Quadrates mit den Eckpunkten $(1, i), (1, -i), (-1, i), (-1, i)$ in der komplexen Ebene.