UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
8. Dezember 2006

Lösungen zum 7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösung zu Aufgabe H1

(a) Es ist für $|q| < 1: \ 1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ und $1 + q^2 + \ldots q^{2n} = \dfrac{1 - q^{2(n+1)}}{1 - q^2}$.
Damit erhalten wir

$$a_n = \frac{(1 - q^{n+1})(1 - q^2)}{(1 - q)(1 - q^{2(n+1)})} = \frac{1 + q}{1 + q^{n+1}}. \tag{1}$$

Wegen $|q| < 1$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + q}{1 + q^{n+1}} = 1 + q. \tag{2}$$

(b) Zuerst berechnen wir die ersten Folgenglieder um eine Vermutung zu bekommen wie sich die Folge verhält. Wir erhalten $a_1 = 3$, $a_2 = \sqrt{15}$, $a_3 = \sqrt{\sqrt{15} + 12}$, ... Wir sehen, daß die ersten Folgenglieder alle kleiner als 4 sind. Also behaupten wir $a_n < 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Behauptung beweisen wir mit vollständiger Induktion.

(i) **Induktionsanfang:**Da wir die Glieder a_1, a_2, a_3 schon explit berechnet haben ist dieser Schritt schon erledigt.

(ii) **Induktionsvoraussetzung:** Für ein $n \geq 1$ gelte $a_n > 4$

(ii) **Induktionsschluß:** $n \to n+1$. Nach der Definition von a_n und der Behauptung $a_n < 4$ erhalten wir

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12} < \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4. \tag{3}$$

Damit ist gezeigt, daß die Folge durch 4 nach oben beschränkt ist. Weiter stellen wir die Behauptung auf, daß die Folge monoton wächst, also es gilt $a_{n+1} > a_n$. Wegen $0 < a_n < 4$ erhalten wir $3a_n < 12$ und $a_n^2 < 4a_n$. Daraus folgt dann

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12} > \sqrt{a_n + 3a_n} = \sqrt{4a_n} > \sqrt{a_n^2} = |a_n| = a_n. \tag{4}$$

Damit haben wir gezeigt, daß a_n eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist. Damit ist die Folge konvergent.

Jetzt müssen wir nur noch den Grenzwert a ausrechnen. Wir behaupten $a = 4$ und betrachten dazu die Folge $a_{n+1} - \sqrt{a_n + 12}$, deren Folgenglieder alle identisch verschwinden. Es gilt also

$$0 = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - \sqrt{a_n + 12}) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 12} = a - \sqrt{a - 12} \quad (5)$$

bzw.

$$a^2 = a + 12 \Rightarrow a = \begin{cases} -3 \\ 4 \end{cases} . \quad (6)$$

Da aber $a = -3$ die Gleichung (5) nicht erfüllt gilt $a = 4$.

(c) Die Folge a_n ist eine Nullfolge, denn $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$.
Damit haben wir

$$\begin{aligned}
G &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1 - \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1 - \sin(a_n)}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{\sin(a_n)}{1 + \sqrt{1 - \sin(a_n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{a_n}{1 + \sqrt{1 - \sin(a_n)}} \underbrace{\frac{\sin(a_n)}{a_n}}_{\to 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{1 - \sin(a_n)}} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{1 - \sin(a_n)}} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \sin(a_n)}}}_{\to 2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}}_{\to 2} \\
&= \frac{1}{4}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe H2

(a) Setzen wir $z = x + iy$ und $c = a + ib$ in $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ein, so erhalten wir

$$z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1} = (x_n + iy_n)^2 + a + ib = x_n^2 + 2ix_n y_n - y_n^2 + a + ib \quad (8)$$

umd somit

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= Re\, z_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \quad (9) \\
y_{n+1} &= Im\, z_{n+1} = 2x_n y_n + b \quad (10)
\end{aligned}$$

(b) (i) Wir schreiben $z_{n+1} = z_n^2$ in Polarkoordinaten um und erhalten

$$r_{n+1}\left(\cos\left(\varphi_{n+1}\right) + i \sin\left(\varphi_{n+1}\right)\right) = r_n^2\left(\cos\left(2\varphi_n\right) + i \sin\left(2\varphi_n\right)\right) \quad (11)$$

Vergleich von Betrag und Argument ergibt

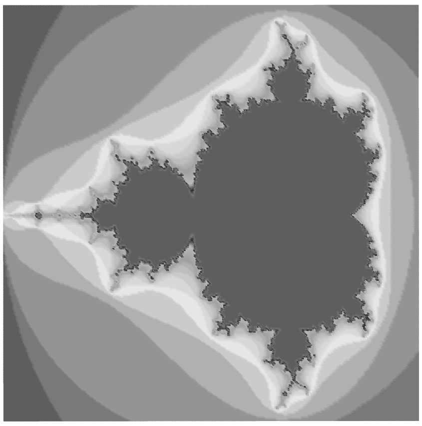
$$r_{n+1} = r_n^2,\ \varphi_{n+1} = 2\varphi_n. \tag{12}$$

Wenn wir jetzt $r_n < 1$ wählen, dann ist auch $r_n^2 < 1$ und somit ist die Folge konvergent, d.h. alle Anfangswerte im Innern des Einheitskreises liefern die Konvergenz gegen $(0,0)$. Beachte, das Argment spielt in dieser Überlegung keine Rolle.

(ii) Analog dem Vorgehen in (b) erhalten wir mit $r_n = 1$ eine beschränkte Folge, die nicht gegen $(0,0)$ konvergiert.

(c) Mit der folgenden Maple-Routine kann die Mandelbrotmenge bzw. das Äpfelmännchen erzeugt werden:

```
> restart: with(plots):
> mandelbrot := proc(x, y)
> local c, z, m;
>  c :=  evalf(x+y*I);
>z := c;
> for m to 30 while abs(z) < 2 do
> z := z^2+c
> od;
> m
> end:
> plot3d(0,-2 .. 0.7, -1.2 .. 1.2, orientation = [-90,0], grid = [250,250], ...
   style = patchnogrid, scaling =constrained, color = mandelbrot);
```



Lösung zu Aufgabe H3

(a)

$$a_n = \frac{3n^2 + \sqrt{n^3+2}}{n^2 - n + 1} = \frac{3 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^4}}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{1} = 3, \tag{13}$$

also:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3. \tag{14}$$

(b) Da $3 = \sqrt[n]{3^n} \leq a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2}$, ist
$$3 = \lim_{n\to\infty} 3 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \sqrt[n]{2} = 3 \qquad (\text{da } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1), \tag{15}$$
und nach dem Sandwich-Theorem somit
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3 \tag{16}$$

(c) Für gerades $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ ist
$$a_n = a_{2k} = \big(1 + \frac{1}{4k}\big)^{6k} = \Big(\big(1 + \frac{1}{4k}\big)^{4k}\Big)^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{k\to\infty} e^{\frac{3}{2}}, \tag{17}$$
da $\lim\limits_{m\to\infty} \big(1 + \frac{1}{m}\big)^m = e$.
Für ungerades $n = 2k - 1$ $(k \in \mathbb{N})$ ist

$$\begin{aligned}
a_n = a_{2k-1} &= \big(1 - \frac{1}{4k-2}\big)^{6k-3} = \big(\frac{4k-3}{4k-2}\big)^{6k-3} \\
&= \left(\frac{1}{\frac{4k-2}{4k-3}}\right)^{6k-3} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4k-3}}\right)^{6k-3} \\
&= \left(\frac{1}{\big(1 + \frac{1}{4k-3}\big)^{4k-3}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4k-3}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&\to \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 1^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}} \text{ für } k \to \infty.
\end{aligned} \tag{18}$$

Es ist also
$$\begin{aligned}
\limsup(a_n) &= e^{\frac{3}{2}}, \\
\liminf(a_n) &= e^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht.

(d) Um die Häufungspunkte einer rekursiv definierten Folge zu bestimmen, wünschen wir uns die Folge lieber als Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Dazu schreiben wir uns die ersten paar Folgeglieder auf:
$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{3}{8},\ a_5 = \frac{7}{8},\ a_6 = \frac{7}{16},\ a_7 = \frac{15}{16},\ a_8 = \frac{15}{32},\ \ldots$$
und erkennen, dass allgemein
$$a_{2k} = \frac{2^k - 1}{2^{k+1}} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \tag{20}$$

für $k = 0, 1, \ldots$ gelten könnte. Mit vollständiger Induktion bestätigen wir dies. Der Induktionsanfang ist schon durchgeführt.

Induktionsschritt: sei für alle $l \leq n$ das Folgeglied a_l wie oben beschrieben. Wir haben a_{n+1} zu bestimmen. Ist $n+1 = 2k+1$, so ist $a_{n+1} = \frac{1}{2} + a_{2k} = \frac{1}{2} + \frac{2^k-1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$, und ist $n+1 = 2k$, so ist $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_{2k-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^k-1}{2^k} = \frac{2^k-1}{2^{k+1}}$, wie gewünscht.

Nun zu den Häufungspunkten. Für gerade $n = 2k$ konvergiert die Teilfolge $a_n = \frac{2^k-1}{2^{k+1}} = \frac{1-\frac{1}{2^k}}{2}$ gegen $\frac{1}{2}$. Die Teilfolge mit ungeraden Indizes $a_{2k+1} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$ konvergiert gegen 1. Somit haben wir für unsere Folge die beiden Häufungspunkte $\frac{1}{2}$ und 1.

(e) Wir wissen schon, dass $a_n \to e$ für $n \to \infty$ gilt; wir müssen also nur noch zeigen, dass $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung ist. Dies bedeutet: (a_n) wächst monoton, (b_n) fällt monoton, es gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

(a_n) wächst monoton: Zu zeigen ist $a_n \leq a_{n+1}$, also

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \leq \frac{n+2}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \geq \frac{n+1}{n+2}. \tag{21}$$

Die letzte Ungleichung gilt: Die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x \geq -1$ liefert liefert mit $x = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$ nämlich

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1-\frac{n}{(n+1)^2}, \tag{22}$$

und wegen $(n+1)^2 = n^2+2n+1 \geq n^2+2n = n(n+2)$ folgt

$$\geq 1-\frac{n}{n(n+2)} = 1-\frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}. \tag{23}$$

(b_n) fällt monoton: Wir formen die Aussage $b_n \geq b_{n+1}$ äquivalent um:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1}. \tag{24}$$

Um die letzte Ungleichung zu zeigen, verwenden wir wieder die Bernoullische Ungleichung und $(n+1)^2 \geq n(n+2)$:

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq 1+\frac{n+1}{n(n+2)} \geq 1+\frac{n+1}{(n+1)^2} = 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}. \tag{25}$$

Die Monotonieaussagen sind damit gezeigt. Weiter gilt

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{a_n}{n}. \tag{26}$$

Wegen $a_n \geq 0$ folgt hieraus $b_n - a_n \geq 0$, also $a_n \leq b_n$ und wegen $a_n \to e$ für $n \to \infty$ ergibt sich $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Damit ist alles gezeigt.

Lösung zu Aufgabe H4

(a) Mit dem Ansatz $x_n = a^n, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ n \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_{n+1} + x_n \quad \Leftrightarrow \quad a^{n+2} = a^{n+1} + a^n \quad \Leftrightarrow \quad a^n(a^2 - a - 1) = 0 \\ a_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Also die Zahlen $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $a_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ erfüllen die Rekursion.

(b) Wir zeigen daß $z_n = c_1 x_n + c_2 y_n = c_1 a_1^n + c_2 a_2^n,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig die Rekursion erfüllen.

$$a_1^{n+2} = a_1^{n+1} + a_1^n \tag{28}$$

$$a_2^{n+2} = a_2^{n+1} + a_2^n \tag{29}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} c_1 a_1^{n+2} + c_2 a_2^{n+2} &= c_1(a_1^{n+1} + a_1^n) + c_2(a_2^{n+1} + a_2^n) \\ &= c_1 a_1^{n+1} + c_2 a_2^{n+1} + c_1 a_1^n + c_2 a_2^n \\ &= c_1 x_{n+1} + c_2 y_{n+1} + c_1 x_n + c_2 y_n \\ &= z_{n+1} + z_n \\ &= z_{n+2} \end{aligned} \tag{30}$$

(c) Jetzt müssen wir die Konstanten c_1 und c_2 bestimmen. Wir wissen daß $x_0 = 1 = x_1$ ist und dann auch $z_0 = z_1 = 1$. Daraus folgt das Gleichungssystem

$$c_1 + c_2 = 1 \tag{31}$$

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 = 1 \tag{32}$$

mit $a_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Die Lösung des Gleichungssystems ist dann

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\ c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}. \tag{33}$$

Weiter bekommen wir

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right). \end{aligned} \tag{34}$$

(d) Die letzte Gleichung in (c) nennt man **Binetische Formel** und die Zahlen z_n heißen **Fibonacci-Zahlen**.