Lösung zu Aufgabe T1

(a) Wir betrachten zuerst das Produkt $\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)$ und behaupten für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, \; x \neq 1. \tag{35}$$

Dies beweisen wir durch vollständige Induktion:

(i) **Induktionsannahme:** $n = 0 : 1 + x = \dfrac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \dfrac{1-x^2}{1-x}$. Also für n=0 ist die Behauptung richtig.

(ii) **Induktionsvorraussetzung:** Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sei die Behauptung richtig, also

$$(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, \; x \neq 1. \tag{36}$$

(iii) **Induktionsschluss:** $n \to n+1$

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^{n+1}}) &= (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})(1+x^{2^{n+1}}) \\ &= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\cdot(1+x^{2^{n+1}}) \\ &= \frac{1-\left(x^{2^{n+1}}\right)^2}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+1}\cdot 2}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x}.\end{aligned} \tag{37}$$

Jetzt setzen wir $x = \dfrac{1}{2}$ und erhalten

$$G = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2. \tag{38}$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}a_n &= \sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1} = \frac{(n^2+2)-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{3}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1}} \\ &< \frac{3}{2\sqrt{n^2-1}}\end{aligned} \tag{39}$$

(Hinweis: $\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1} > 2\sqrt{n^2-1}$)

Jetzt bestimmen wir alle n für die $\dfrac{3}{2\sqrt{n^2-1}} < \dfrac{1}{2000}$ ist. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}3000 &< \sqrt{n^2-1} \\ 9\cdot 10^6 &< n^2-1\end{aligned}$$

$$n^2 \quad > \quad 9 \cdot 10^6 + 1 \tag{40}$$

Daraus folgt dann

$$n > \sqrt{9 \cdot 10^6 + 1}. \tag{41}$$

Nun gilt

$$\sqrt{9 \cdot 10^6 + 1} < 3001. \tag{42}$$

Jetzt zeigen wir , daß für alle $n > 3000$ die gegebene Ungleichung gilt. Ist $n \geq 3001$ so ergibt sich $n \geq 3001 > \sqrt{9 \cdot 10^6 + 1}$ also $n^2 > 9 \cdot 10^6 + 1$ und $a_n < \dfrac{3}{2\sqrt{n^2 - 1}} < \dfrac{1}{2000}$. Also für $N = 3000$ gilt sicher für alle $n > N$ die gefortderte Ungleichung.

(c) Zuerst betrachten wir die Folge a_n und erweitern sie mit dem Term $\sqrt{25n^2 + 49n - 10} + 7n$. Dies liefert dann

$$a_n = \frac{25n^2 + 49n - 10 + 49n^2}{\sqrt{25n^2 + 49n - 10} + 7n} = \frac{-24n^2 + 49n - 10}{n\sqrt{25 + \frac{49}{n} - \frac{10}{n^2}} + 7n}. \tag{43}$$

Der Nenner wächst aber linear in n, während Zähler quadratisch in n wächst. Daraus folgt, daß die Folge divergent ist.

Für b_n erhalten wir nach Erweiterung mit $\sqrt{49n^2 + 25n - 10} + 7n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{49n^2 + 25n - 10 - 49n^2}{\sqrt{49n^2 + 25n - 10} + 7n} = \frac{25n - 10}{n\sqrt{49 + \frac{25}{n} - \frac{10}{n^2}} + 7n} \\ &= \frac{25 - \frac{10}{n}}{\sqrt{49 + \frac{25}{n} - \frac{10}{n^2}} + 7} \to \frac{25}{7+7} = \frac{25}{14}. \end{aligned} \tag{44}$$

Lösung zu Aufgabe T2

(a) Die Folge ist durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{45}$$

gegeben. (Offenbar sind alle $a_n \geq 0$; also kann man die Wurzel ziehen.)

Die Folge ist monoton wachsend, wie wir nun mit vollständiger Induktion zeigen:

Induktionsanfang: Es gilt $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geq \sqrt{2} = a_1$.

Induktionsschluss: Es sei bereits $a_n \geq a_{n-1}$ für ein gewisses $n \geq 2$ bewiesen. Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \geq \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n. \tag{46}$$

Als nächstes zeigen wir, dass die Folge nach oben durch 2 beschränkt ist:

Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.

Induktionsschluss: Ist $a_n \leq 2$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, so folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Da (a_n) monoton wächst und nach oben beschränkt ist, konvergiert die Folge gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Alle a_n sind ≥ 0, also gilt dies auch für a. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsformel ergibt sich für a die Gleichung $a = \sqrt{2+a}$. Quadrieren liefert $a^2 = 2 + a$, also $a^2 - a - 2 = 0$. Diese Gleichung hat die zwei Lösungen

$$a_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}. \tag{47}$$

Wegen $a \geq 0$ folgt $a = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$.

(b) Wir haben die folgende Äquivalenzenkette:

$$a_n < a_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n!)^{1/n} < \big((n+1)!\big)^{1/(n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad (n!)^{(n+1)/n} < (n+1)! \tag{48}$$

$$\Leftrightarrow \quad n! \cdot (n!)^{1/n} < (n+1)! \quad \Leftrightarrow \quad (n!)^{1/n} < n+1. \tag{49}$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aber unter Verwendung der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel:

$$(n!)^{1/n} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \leq \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n} = \tfrac{1}{2}(n+1) < n+1. \tag{50}$$

Für $b_n := n!/n^n$ gilt

$$\frac{a_n}{n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{b_n}. \tag{51}$$

Um den gesuchten Grenzwert zu berechnen betrachten wir

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}. \tag{52}$$

Nach Satz der Vorlesung gilt dann auch $\sqrt[n]{b_n} \to e^{-1}$ für $n \to \infty$, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1/e. \tag{53}$$

Lösung zu Aufgabe T3

(a) Etwa $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ erfüllt $|a_n - a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Aber die harmonische Reihe ist bekanntlich divergent!

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\varepsilon = 2\delta^2$ für geeignetes $\delta > 0$. Dann existiert ein n_0, sodass für $n > n_0$ stets $|a_n| < 2\delta^2 = \varepsilon$ ist. Die Folge konvergiert also gegen Null.

(c) Etwa $a_n = (-1)^n$ erfüllt $|a_n + a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$. Die Folge ist jedoch divergent.

(d) Die Folge $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ erfüllt sicher $|a_n \cdot a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$, ist aber divergent.

Lösung zu Aufgabe T4

(a)

$$a_n = 2^{1-n}(\sqrt{3}+i)^n = 2^{1-n}(2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))^n = 2(\cos(\frac{n\pi}{6}) + i\sin(\frac{n\pi}{6}))$$
$$= \begin{cases} \sqrt{3}+i & \text{für n = 1, 13, 25, } \ldots \\ 1+\sqrt{3}i & \text{für n = 2, 14, 26, } \ldots \\ \vdots & \vdots \\ \sqrt{3}-i & \text{für n = 11, 23, 35, } \ldots \\ 2 & \text{für n = 12, 24, 36, } \ldots . \end{cases} \tag{54}$$

Die Folge (a_n) besitzt 12 Häufungspunkte: $\pm 2, \pm 2i, \pm 1 \pm \sqrt{3}i$ und $\pm\sqrt{3} \pm i$. Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht, $\limsup(a_n)$ und $\liminf(a_n)$ existieren ebenfalls nicht, bzw. sind nicht definiert, da $\mathbb{C}$ nicht angeordnet ist.

(b)

$$\begin{aligned} a_n &= \Big(\frac{n-2}{n+3}\Big)^{2n+3} = \Big(\frac{n+3-5}{n+3}\Big)^{2n+3} = \Big(1 - \frac{5}{n+3}\Big)^{2n+3} \\ &= \Big(1 + \frac{-5}{n+3}\Big)^{2(n+3)}\Big(1 + \frac{-5}{n+3}\Big)^{-3} \\ &\Rightarrow \Big(\Big(1 + \frac{-5}{n+3}\Big)^{(n+3)}\Big)^2\Big(1 + \frac{-5}{n+3}\Big)^{-3} \xrightarrow{n\to\infty} (e^{-5})^2 \cdot 1^{-3} \\ &\Rightarrow e^{-10} = \lim_{n\to\infty} a_n \end{aligned} \tag{55}$$

(c) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n + i2^{-n}n = b_n + ic_n$. Wir betrachten Real- und Imaginärteil getrennt:

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n^2+2n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+2n} - n)(\sqrt{n^2+2n} + n)}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} \\ &= \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1. \end{aligned} \tag{56}$$

$$c_n = 2^{-n}n = \frac{n}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{57}$$

da

$$2^n = (1+1)^n \overset{\text{Bin. S.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\geq}_{\text{für } n \geq 2} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \underbrace{\geq}_{\frac{n^2}{2} > n \text{ für } n \geq 2} \frac{n^2 - \frac{n^2}{2}}{2} = \frac{n^2}{4}, \tag{58}$$

und somit

$$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{\frac{n^2}{4}} = \frac{4}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} c_n. \tag{59}$$

Es ist also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n + ic_n) = 1$. ($\liminf(a_n)$ und $\limsup(a_n)$ sind nur für $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definiert).