**Lösung zu Aufgabe T1**

(a) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + a_{n-1}\big)$.
Zu zeigen: Zu gegebenem $\varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon)$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall\ n, m \geq n_0$.
Wir betrachten zunächst

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2}\big(a_n + a_{n-1}\big) - a_n = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} = -\frac{1}{2}\big(a_n - a_{n-1}\big) && (25)\\ &= -\frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}\big(a_{n-1} + a_{n-2}\big) - a_{n-1}\big) = -\frac{1}{2}\big(-\frac{1}{2}\big(a_{n-1} - a_{n-2}\big)\big) && (26)\\ &= \big(-\frac{1}{2}\big)^2\big(a_{n-1} - a_{n-2}\big) = \ldots = \big(-\frac{1}{2}\big)^n\big(a_1 - a_0\big) = \big(-\frac{1}{2}\big)^n. && (27)\end{aligned}$$

Sei nun $m > n$ und $m = n + k, k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_m - a_n &= a_{n+k} - a_n = (a_{n+k} - a_{n+k-1}) + (a_{n+k-1} - a_{n+k-2}) + \ldots - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) && (28)\\ &\overset{\text{s.o.}}{=} \big(-\frac{1}{2}\big)^{n+k-1} + \big(-\frac{1}{2}\big)^{n+k-2} + \ldots + \big(-\frac{1}{2}\big)^{n+1} + \big(-\frac{1}{2}\big)^n && (29)\\ &= \big(-\frac{1}{2}\big)^n \sum_{j=0}^{k-1}\big(-\frac{1}{2}\big)^j = \big(-\frac{1}{2}\big)^n \frac{1-(-\frac{1}{2})^k}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}\big(-\frac{1}{2}\big)^n\big(1 - \big(-\frac{1}{2}\big)^k\big). && (30)\end{aligned}$$

Es ist also

$$|a_m - a_n| = \big|\frac{2}{3}\big(-\frac{1}{2}\big)^n\big(1 - \big(-\frac{1}{2}\big)^k\big)\big| = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\big|\underbrace{\big(1 - \big(-\frac{1}{2}\big)^k\big)}_{\leq\frac{3}{2}}\big| \leq \frac{1}{2^n}, \tag{31}$$

und somit $|a_m - a_n| < \varepsilon$, falls

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \log_2 \varepsilon^{-1}. \tag{32}$$

Wir wählen $n_0 = \big[\log_2 \varepsilon^{-1}\big] + 1$. Die Folge $(a_n)$ ist also eine Cauchy-Folge und der Grenzwert existiert. Es gilt $a_{n+1} - a_n = \big(-\frac{1}{2}\big)^n$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ a_{n+1} &= \big(-\frac{1}{2}\big)^n + a_n = \big(-\frac{1}{2}\big)^n + \big(-\frac{1}{2}\big)^{n-1} + a_{n-1} && (33)\\ &= \ldots = \big(-\frac{1}{2}\big)^n + \big(-\frac{1}{2}\big)^{n-1} + \ldots + \big(-\frac{1}{2}\big)^1 + a_1 && (34)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\big(-\frac{1}{2}\big)^k \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty}\big(-\frac{1}{2}\big)^k = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}. && (35)\end{aligned}$$

Es ist also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

(b) ( i) Behauptung: $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweis: Induktion. Offensichtlich ist $a_n, b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: $n = 1$: $a_1 < b_1$ nach Voraussetzung.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n < b_n$.
Induktionsschritt: $n \to n+1$: Da

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + b_n\big) - \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{(a_n+b_n)^2 - 4(a_nb_n)}{2(a_n+b_n)} = \frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)} > 0, \tag{36}$$

$a_n, b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und nach Induktionsvoraussetzung insbesondere $a_n \neq b_n$ gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Da $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}\big(a_n - b_n\big) \overset{\textbf{(i)}}{<} 0$ ist die Folge $(b_n)$ monoton fallend. Und wegen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2b_n}{a_n+b_n} \overset{\textbf{(i)}}{>} \frac{2b_n}{b_n+b_n} = 1, \tag{37}$$

ist $(a_n)$ monoton wachsend. Es ist

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n \overset{\textbf{(i)}}{<} b_n < b_{n-1} < \ldots < b_1. \tag{38}$$

Die Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ sind beschränkt. Es gilt $0 < a_n < b_1$ und $0 < b_n < b_1$.

(iii) Gemäß Teilaufgabe **(ii)** existieren die Grenzwerte $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Durch den Grenzübergang in der Rekursionsformel für $(b_n)$ ergibt sich die Gleichung

$$b = \frac{1}{2}\big(a+b\big) \quad \Leftrightarrow \quad a = b. \tag{39}$$

Es ist

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \cdot \frac{1}{2}\big(a_n+b_n\big) = a_nb_n = \ldots = a_1b_1. \tag{40}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich

$$ab \overset{\text{s.o.}}{=} a^2 = b^2 = a_1b_1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{a_1b_1} = b. \tag{41}$$

Es ist also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_1b_1}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\sqrt{a_1b_1} < 0$ nicht möglich, da $a_n, b_n > 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$) .

(c) Die Konvergenz der Folge beweisen wir mit Hilfe des Cauchykriteriums. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Voraussetzung

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq q^n \cdot |x_1 - x_0|. \tag{42}$$

Für $m \geq n$ gilt daher die Abschätzung

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \tag{43}$$

$$\leq |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq q^{m-1} \cdot |x_1 - x_0| + \cdots + q^n \cdot |x_1 - x_0| \tag{44}$$

$$= q^n(q^{m-n-1} + \cdots + 1) \cdot |x_1 - x_0| \leq q^n \cdot |x_1 - x_0| \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|. \tag{45}$$

Im Falle $x_0 = x_1$ ist die Folge konstant und konvergiert daher trivialerweise. Sonst können wir wegen $q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $N$ finden, so dass

$$q^n \leq \frac{(1-q)\varepsilon}{|x_1 - x_0|} \quad \text{für } n \geq N. \tag{46}$$

Das bedeutet aber: Für $m \geq n \geq N$ ist $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$. Die Folge $(x_n)$ ist also nach dem Cauchykriterium konvergent.

Machen wir in der obigen Abschätzung für $|x_m - x_n|$ den Grenzübergang $m \to \infty$, so folgt die behauptete Abschätzung für $|x - x_n|$.

**Lösung zu Aufgabe T2** Die Reihe ist konvergent, also gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$; da die Folge $(a_n)$ zudem monoton fällt, ist $a_n \geq 0$ für alle $n$.
Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Reihe konvergiert, gibt es ein $N_0$ mit

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N_0} a_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{47}$$

Wegen $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt auch $N_0 \cdot a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Somit existiert ein $N_1$ mit $N_0 \cdot a_n \leq \varepsilon/2$ für $n \geq N_1$. Damit ergibt sich für $N \geq \max\{N_0, N_1\}$

$$N \cdot a_N = N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{N} a_N \leq N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{N} a_n \leq N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{48}$$

(Bei der ersten Abschätzung benutzen wir, dass $(a_n)$ monoton fällt.)
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist damit $n \cdot a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ bewiesen.
Die Voraussetzung $a_n \geq 0$ statt der Monotonie genügt nicht: Man betrachte das Beispiel

$$a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{falls } n \text{ eine Zweierpotenz ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{49}$$

Diese Reihe ist konvergent, weil $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ konvergiert. Wenn $n$ eine Zweierpotenz ist, gilt jedoch $n \cdot a_n = 1$; die Folge $(n \cdot a_n)$ konvergiert also nicht gegen 0.

**Lösung zu Aufgabe T3**

(a) Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für $n > 1$ ist $n > \sqrt{n}$ und damit

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0. \tag{50}$$

Die Konvergenz gegen 0 ist klar wegen $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}. \tag{51}$$

Die erste Summe ist die $N$-te Partialsumme einer Reihe, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante $C$ mit

$$s_N \leq C - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}. \tag{52}$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe folgt hieraus $s_N \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$, d. h. die gegebene Reihe ist tatsächlich divergent.

Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge $(a_n)$ nicht monoton ist.

(c) Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades $n$ gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \tag{53}$$

Für gerades $n$ dagegen ergibt sich

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2\cdot 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{54}$$

Es gilt also $\limsup(b_{n+1}/b_n) = \infty > 1$ und $\liminf(b_{n+1}/b_n) = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.

Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades $n$ gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2}, \tag{55}$$

d. h. es gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geq \frac{3}{2} > 1$, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

**Lösung zu Aufgabe T4**

(a) Wir ziehen das Wurzelkriterium zu Rate:

$$\sqrt[n]{|z^n/n^2|} = \frac{|z|}{(\sqrt[n]{n}\,)^2} \xrightarrow{n\to\infty} |z|. \tag{56}$$

Damit wissen wir: Für $|z| < 1$ liegt Konvergenz vor, für $|z| > 1$ jedoch Divergenz. Untersuchen wir noch den Fall $|z| = 1$: Dann gilt

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}, \tag{57}$$

d. h. die Konvergenz folgt mit dem Majorantenkriterium.

Insgesamt ergibt sich: Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $|z| \leq 1$.

(b) Diesmal verwenden wir das Quotientenkriterium: Für $a_n := n!\, z^n$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!\,|z|^{n+1}}{n!\,|z|^n} = (n+1)|z|. \tag{58}$$

Dieser Ausdruck strebt für $z \neq 0$ gegen $\infty$, für $z = 0$ gegen 0. Also konvergiert die Reihe nur für $z = 0$.

(c) Auszuschließen sind zunächst alle $z$ für die $z^{2n} = -1$ für ein $n$ gilt. Alle derartigen $z$ haben Betrag 1; für alle anderen $z$ mit $|z| = 1$ gilt

$$\left|\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right| = \frac{|z|^n}{|1+z^{2n}|} = \frac{1}{|1+z^{2n}|} \geq \frac{1}{1+|z|^{2n}} = \frac{1}{2}. \tag{59}$$

Die Reihenglieder bilden also keine Nullfolge, d. h. die Reihe kann nicht konvergieren.

Nun sei $r := |z| < 1$. Wir haben $|1 + z^{2n}| \geq 1 - |z^{2n}| = 1 - r^{2n}$ wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung. Also ist

$$\left|\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right| \leq \frac{r^n}{1-r^{2n}} \leq \frac{r^n}{1-r^2}, \tag{60}$$

und mit dem Majorantenkriterium (konvergente geometrische Reihe) folgt Konvergenz.

Im Falle $r > 1$ verwenden wir $|1 + z^{2n}| \geq |z^{2n}| - 1 = r^{2n} - 1$. Wegen $r^{2n} \to \infty$ für $n \to \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $r^{2n} \geq 2$ für $n \geq N$. Für solche $n$ ist dann $1 \leq \frac{1}{2}r^{2n}$ und wir erhalten

$$\left|\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right| \leq \frac{r^n}{r^{2n}-1} \leq \frac{r^n}{r^{2n}-\frac{1}{2}r^{2n}} = \frac{2}{r^n} =: c_n \quad \text{für } n \geq N. \tag{61}$$

Da $\sum_{n=N}^{\infty} c_n$ konvergente geometrische Reihe, gilt dies wegen des Majorantenkriteriums (auch für $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, wobei $a_n := z^n/(1+z^{2n})$. Dann konvergiert aber auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Insgesamt: Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $|z| \neq 1$.