UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
14. Dezember 2006

Lösungen zum 9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösung zu Aufgabe H1

(a) Wir können die Zahl $S = 0.181818\ldots$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} 0.181818\ldots &= \frac{1}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \ldots = \frac{18}{100} + \frac{18}{100^2} + \frac{18}{100^3} + \ldots \\ &= \frac{18}{100} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{100^n} \end{aligned} \tag{1}$$

Wir haben also $S = \frac{18}{100} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{100^n}$. Bezeichne S_N nun die N-te Partialsumme, dann haben wir

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{100^n} = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{100^{N+1}}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99}. \tag{2}$$

Also gilt

$$S = \frac{18}{100} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{100^n} = \frac{18}{100} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{100^n} = \frac{18}{100}\frac{100}{99} = \frac{2}{11}. \tag{3}$$

(b) Gesucht ist der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Dazu zerlegen wir das Reihenglied $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ in die Partialbrüche:

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \tag{4}$$

Für die N-te Partialsumme der Reihe gilt dann

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots \end{aligned}$$

$$\dots + \left(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N_1}\right) + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \tag{5}$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}. \tag{6}$$

Damit erhalten wir für die Reihensumme

$$S = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1. \tag{7}$$

(c) (i) Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$ ist divergent, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = 1. \tag{8}$$

Da die Reihenglieder keine Nullfolge bilden ist die Reihe divergent.

(ii) Auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n}{2}\right)$ ist divergent, denn es gilt

$$|a_n| = \left|cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2k \\ 0 & \text{für } n = 2k-1 \end{cases} \quad ,k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Da die Reihenglieder keine Nullfolge bilden ist die Reihe divergent.

(iii) Die Reihe $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{\left(\pi + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{2n}}$ ist konvergent, denn nach dem Wurzelkriterium gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\pi + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} = \frac{1}{\pi^2} < 1. \tag{10}$$

(iv) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n!}$ ist nach dem Wurzelkriterium konvergent, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{4} < 1. \tag{11}$$

Lösung zu Aufgabe H2

(a) Weil $e^x > 0$ ist, gilt $e^x > -e^{-x}$ und somit $2e^x > e^x - e^{-x}$ bzw. $e^x > \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

(b) (i) **Monotonie:** Die Funktion $\sinh(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dies folgt aus der Monotonie von e^x. Ist nämlich $s < t$ so haben wir $e^s < e^t$ und $e^{-t} < e^{-s}$. Daraus folgt $e^s + e^{-t} < e^t + e^{-s}$ bzw. $\frac{1}{2}\left(e^s - e^{-s}\right) < \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$, also $\sinh(s) < \sinh(t)$.

(ii) **Umkehrfunktion:** Wegen der Monotonie von $\sinh(x)$ existiert eine eindeutige Umkehrfunktion. Wir erhalten die Gleichung der Umkehrfunktion indem wir die Gleichung $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ nach x auflösen. Es gilt also

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} && | \cdot 2e^x \\
2ye^x &= e^{2x} - 1 \\
e^{2x} - 2ye^x &= 1 \\
(e^x)^2 - 2ye^x + y^2 &= 1 + y^2 \\
(e^x + y)^2 &= 1 + y^2 \\
|e^x + y| &= \sqrt{1 + y^2} \qquad (12)
\end{aligned}$$

Da nun $e^x > y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ nach Teil (a) ist, knnen wir in (12) die Betragstriche weglassen und erhalten

$$e^x = y + \sqrt{1 + y^2}. \qquad (13)$$

Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist die rechte Seite in (13) positiv. Wir können also logarithmieren und erhalten

$$x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}). \qquad (14)$$

Vertauschen von x und y liefert uns die Umkehrfunktion

$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}). \qquad (15)$$

(iii) Die Umehrfunktion des sinh wird als **Area Sinus hyperbolicus** (*arsinh*) bezeichnet.

Lösung zu Aufgabe H3

(a) Dieser Grenzwert existiert; es gilt

$$\lim_{x\to 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9} = \lim_{x\to 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x\to 9} \frac{-1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{-1}{\sqrt{9} + 3} = -\frac{1}{6}. \qquad (16)$$

(b) Für $x \to 0$ konvergiert der Zähler des Bruches gegen -4, und der Nenner hat in $x = 0$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel: $x^3 - 2x^2 + 7x = x(x^2 - 2x + 7)$; es gilt

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 2x^2 + 7x} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 2x^2 + 7x} = -\infty\,. \qquad (17)$$

Da diese beiden Grenzwerte nicht übereinstimmen, existiert der zu betrachtende Grenzwert nicht.

(c) Zähler und Nenner haben -1 als Nullstelle; Polynomdivision liefert

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4) \quad \text{und} \quad x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)\,. \qquad (18)$$

Folglich existiert der Grenzwert:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x + 1)(x + 4)}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x + 4}{x^2 + 1} = \frac{-1 + 4}{(-1)^2 + 1} = \frac{3}{2}\,. \qquad (19)$$

(d) Hier hat der Nenner in $x = 2$ keine Nullstelle, daher gilt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 7x + 2}{x^3 - x^2 + 3x} = \frac{2^2 + 7 \cdot 2 + 2}{2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2} = \frac{20}{10} = 2\,. \tag{20}$$

Lösung zu Aufgabe H4 Es gilt $f(0) = b$ und $f(2) = c - 2$. Aus $f(0) = f(2) = 0$ folgt daher $b = 0$ und $c = 2$. Für $x > 1$ und für $x < 1$ ist f offenbar stetig; damit f auch an der Stelle $x = 1$ stetig ist, muss gelten:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1), \quad \text{also} \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1+} f(x)\,. \tag{21}$$

Nun haben wir

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) = 2 + a \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = 2 - 1 = 1\,; \tag{22}$$

somit muss $a = -1$ gelten.