UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
8. Januar 2007

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1

(a) Aufgabe H3 9.Übungsblatt

(b) Aufgabe H4 9.Übungsblatt

Aufgabe H2

(a) Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) $f_n(x) = \dfrac{x + nx^2 + nx}{1 + nx}$, auf $I_1 = [0, \infty)$ bzw. auf $I_2 = [a, \infty)$ mit einem $a > 0$

(ii) $f_n(x) = (1 - x)^n$ auf $I_1 = [0, 1]$, bzw. auf $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$

(iii) $f_n(x) = nx(1 - x)^n$ auf $I = [0, 1]$.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x)$ auf $I = (-1, 1]$, (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2 + n^2}$ auf $I = \mathbb{R}$,

– (iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2}{n^3 + x^3}$ auf $I = [0, 1]$, (iv) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1 + x^2)^k}$ auf $I = \mathbb{R}$,

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n(1+x+x^2)}$ auf $I = \mathbb{R}$, (vi) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^2}{(1 + x^2)^k}$ auf $I = \mathbb{R}$.

Aufgabe H3 Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n n!(2n)!}{44^{n-1}(3n)!} z^n$ **b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{2^{4k-1}(6 + (-1)^k)^{3k}}$

Aufgabe H4 Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2n + 1}{(n - 1)^2} x^n$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n} (z - 2i)^n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^{4n}$ **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) z^n$

e) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n \cos\frac{1}{n})} x^{2n}$

— bitte wenden —

Aufgabe T1 Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$$

gilt, und dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius $r = 1$ besitzt. Berechnen Sie nun für $|z| < 1$ die Werte der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) z^{2n} .$$

Aufgabe T2 Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) := x^2 + 2x - 3$. Berechnen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $1/f$ darstellt. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Aufgabe T3 Die Folge (a_n) der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch

$$a_0 := 1, \qquad a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} .$$

a) Zeigen Sie: Für den Konvergenzradius r von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt $r \geq \frac{1}{2}$.

b) Die Potenzreihe stellt also auf $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ eine Funktion f dar. Zeigen Sie:

$$f(x) - x f(x) - x^2 f(x) = 1 .$$

c) Folgern Sie: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1} \right)$ mit gewissen Zahlen x_1 und x_2.

d) Gewinnen Sie daraus eine Potenzreihenentwicklung von f und leiten Sie dann eine (nicht rekursive) Formel für a_n ab.

Aufgabe T4 Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0. Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f(x) = (1 + x + x^2)^{-2}, \quad x_0 = 0$

b) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \frac{\pi}{4}$

c) $f(z) = \dfrac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 2$

d) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Hinweis: Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung und die Aufgaben T1-T4 in den Tutorien besprochen.