UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
8. Januar 2007

Lösungen zum 10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösung zu Aufgabe H1

(a) Siehe Lösung zu H3 9.Übungsblatt.

(b) Siehe Lösung zu H4 9.Übungsblatt.

Lösung zu Aufgabe H2

(a) (i) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Für $x > 0$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} = \frac{x/n + x^2 + x}{1/n + x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x^2 + x}{x} = x + 1\,. \tag{1}$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Auf $[0, \infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da die Funktion f in 0 unstetig ist, alle f_n dort aber stetig sind.
Auf $[a, \infty)$ mit einem $a > 0$ liegt dagegen gleichmäßige Konvergenz vor. Dort gilt

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} - (x+1) \right| = \left| \frac{x + nx^2 + nx - (x+1)(1+nx)}{1+nx} \right| \\ &= \left| \frac{x + nx^2 + nx - x - nx^2 - 1 - nx}{1 + nx} \right| = \left| \frac{-1}{1+nx} \right| \le \frac{1}{1+na}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{1+na} \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$; für $n \ge N$ ist dann also $\sup|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$.
Bemerkung: Auf dem Intervall $(0, \infty)$ ist die Konvergenz wiederum *nicht* gleichmäßig, denn es ist $\sup\{\, |f_n(x) - f(x)| : x \in (0, \infty)\,\} = 1$.

(ii) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0, 1]$, so folgt $|1 - x| < 1$ und damit

$$f_n(x) = (1-x)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \tag{4}$$

Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0,1]. \end{cases} \tag{5}$$

Auf $[0, 1]$ ist diese Funktion unstetig, im Gegensatz zu den Funktionen f_n; also kann die Konvergenz auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig sein.

Auf $[\frac{1}{2}, 1]$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor: Hier gilt $|1 - x| \leq \frac{1}{2}$, also

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |(1-x)^n| = |1-x|^n \leq 2^{-n}\,, \tag{6}$$

und wie bei **a)** bedeutet dies gleichmäßige Konvergenz.

Bemerkung: Auf dem Intervall $(0, 1]$ ist die Konvergenz jedoch *nicht* gleichmäßig, denn $\sup\{\,|f_n(x) - f(x)| : x \in (0, 1]\,\} = 1$.

(iii) Offenbar gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 1]$ ist $q := 1 - x \in [0, 1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \tag{7}$$

(Dass $nq^n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, folgt daraus, dass wegen $\sqrt[n]{nq^n} \to q < 1$ für $n \to \infty$ die Reihe über nq^n konvergiert.) Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = 0$.

Obwohl diese Grenzfunktion stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Es gilt

$$\begin{aligned} f_n(\tfrac{1}{n+1}) &= n \cdot \tfrac{1}{n+1}(1 - \tfrac{1}{n+1})^n = \tfrac{n}{n+1}(\tfrac{n}{n+1})^n = \tfrac{n}{n+1}(\tfrac{n+1}{n})^{-n} = \tfrac{n}{n+1}(1 + \tfrac{1}{n})^{-n} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Dies bedeutet aber $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)| \geq \frac{1}{2}e^{-1}$ für alle hinreichend großen n und schließt die gleichmäßige Konvergenz aus.

(b) (i) Setzt man $x = 1$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1-x)x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x(1-x)\cdot\frac{1}{1-x} = x\,. \tag{9}$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1,1) \end{cases} \tag{10}$$

Da diese Funktion, im Gegensaz zu den Partialsummenfunktionen, in $x = 1$ nicht stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Bemerkung: Auch auf $(-1, 1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor, denn es gilt

$$\left|\sum_{n=1}^{N} x^n(1-x) - x\right| = \left|(1-x)x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - x\right| = \left|(1-x)x\frac{1-x^N}{1-x} - x\right| = |x^{N+1}|\,, \tag{11}$$

und offenbar ist $\sup\{\, |x^{N+1}| : x \in (-1,1)\,\} = 1$.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| = \frac{1}{x^2+n^2} \le \frac{1}{n^2}\,. \tag{12}$$

Da die Reihe über $1/n^2$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium: Die vorliegende Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig und damit auch punktweise auf ganz $\mathbb{R}$.

(iii) Für alle $x \in [0, 1]$ gilt

$$\left|\frac{nx^2}{n^3+x^3}\right| = \frac{nx^2}{n^3+x^3} \le \frac{n}{n^3+x^3} \le \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}\,. \tag{13}$$

Da die Reihe über $1/n^2$ konvergiert, können wir das Majorantenkriterium anwenden: Die Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) auf $[0, 1]$.

(iv) Setzt man $x = 0$ ein, so hat die Reihe den Wert 0. Für $x \neq 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k = x^2 \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x^2 \frac{1+x^2}{1+x^2-1} = 1 + x^2\,. \tag{14}$$

Die Funktionenreihe konvergiert somit punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1+x^2, & x \neq 0. \end{cases} \tag{15}$$

Da diese Funktion an der Stelle $x = 0$ unstetig ist, die durch die Partialsummen der Reihe dargestellten Funktionen aber offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein. (Denn sonst würde sich die Stetigkeit übertragen.)

(v) Wegen $1 + x + x^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ gilt $1 + x + x^2 \ge \frac{3}{4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$|e^{-n(1+x+x^2)}| = e^{-n(1+x+x^2)} \le e^{-3n/4}\,. \tag{16}$$

Da die Reihe über $e^{-3n/4}$ konvergiert (geometrische Reihe), liefert das Majorantenkriterium wieder gleichmäßige und damit auch punktweise Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$.

(vi) Für $x = 0$ konvergiert die Reihe offensichtlich mit Wert 0; für $x \neq 0$ folgt die Konvergenz aus dem Leibnizkriterium. (Natürlich könnte man den Wert wieder konkret ausrechnen, da es sich um eine geometrische Reihe handelt.) Wir setzen

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k} \qquad \text{und} \qquad f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}, \tag{17}$$

und zeigen nun, dass sogar gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Das Leibnizkriterium liefert für $x \neq 0$ die Abschätzung

$$|f(x) - f_n(x)| = x^2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+x^2)^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(1+x^2)^k} \right| \leq x^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}. \tag{18}$$

Diese Abschätzung stimmt trivialerweise auch für $x = 0$.
Ist ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gilt für $|x| \leq \sqrt{\varepsilon}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq x^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \varepsilon \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \varepsilon, \tag{19}$$

und für $|x| > \sqrt{\varepsilon}$ ergibt sich

$$|f(x)-f_n(x)| \leq x^2 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leq (1+x^2) \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}. \tag{20}$$

Wählen wir nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(1+\varepsilon)^{-n} \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gilt, so folgt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } n \geq n_0. \tag{21}$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe bewiesen.

Lösung zu Aufgabe H3

a) Es bezeichne a_n den zu z^n gehörenden Koeffizienten. Dann gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{3^n n!(2n)!}{44^{n-1}(3n)!} \cdot \frac{44^n(3n+3)!}{3^{n+1}(n+1)!(2n+2)!} = \frac{44(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{3(n+1)(2n+2)(2n+1)} \tag{22}$$

$$= \frac{44(3+3/n)(3+2/n)(3+1/n)}{3(1+1/n)(2+2/n)(2+1/n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{44 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{44 \cdot 9}{4} = 99. \tag{23}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist also 99.

b) Wieder bezeichne a_k den Koeffizienten von x^k. Dann folgt

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2^{4-1/k}(6+(-1)^k)^3} = \begin{cases} \frac{1}{2^{4-1/k}(6+1)^3} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2^4 \cdot 7^3} = \frac{1}{5488}, & k \text{ gerade}, \\ \frac{1}{2^{4-1/k}(6-1)^3} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2^4 \cdot 5^3} = \frac{1}{2000}, & k \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{24}$$

Als Konvergenzradius ergibt sich also $r = (\limsup \sqrt[k]{|a_k|}\,)^{-1} = (\frac{1}{2000})^{-1} = 2000$.

Lösung zu Aufgabe H4

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1\,. \tag{25}$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x=-1$ und $x=1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}\,. \tag{26}$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}\,. \tag{27}$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1,1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $a_n := (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^{4n}$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^4 \xrightarrow{n\to\infty} e\cdot x^4\,. \tag{28}$$

Folglich konvergiert die Reihe für $e\cdot x^4 < 1$ (also $|x| < e^{-1/4}$) und divergiert für $e \cdot x^4 > 1$ (also $|x| > e^{-1/4}$); ihr Konvergenzradius ist daher $e^{-1/4}$. Untersuchen wir noch den Rand: Beide Randpunkte liefern die gleiche Reihe, nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}\,. \tag{29}$$

Diese Reihe konvergiert nicht, denn die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0: Aus Aufgabe 1 des 8. Übungsblattes wissen wir $(1+\frac{1}{n})^n \geq e - \frac{3}{n}$ und erhalten damit

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n} = \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right)^n \geq \left(\frac{e-\frac{3}{n}}{e}\right)^n = \left(1-\frac{3/e}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-3/e}\,. \tag{30}$$

Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $|x| < e^{-1/4}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe hat also den Konvergenzradius $1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{\left|2^k z^{k^2}\right|} = 2|z|^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases} \tag{31}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k$. Die Reihe konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Wieder wenden wir direkt das Wurzelkriterium an: Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|e^{n(1+(-1)^n \cos\frac{1}{n})} x^{2n}\right|} = \begin{cases} e^{1+\cos\frac{1}{n}} x^2 \xrightarrow{n\to\infty} e^{1+1} x^2 = e^2 x^2, & n \text{ gerade}, \\ e^{1-\cos\frac{1}{n}} x^2 \xrightarrow{n\to\infty} e^{1-1} x^2 = x^2, & n \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{32}$$

Also: $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^{2n}|} = e^2 x^2$. Die Reihe konvergiert für $e^2 x^2 < 1$ und divergiert für $e^2 x^2 > 1$, d. h. der Konvergenzradius ist e^{-1}. An den Randpunkten ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n \cos\frac{1}{n})} e^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n((-1)^n \cos\frac{1}{n} - 1)} . \tag{33}$$

Diese Reihe ist divergent, da die Reihenglieder nicht gegen 0 streben: Für gerades n gilt nämlich wegen der Reihendarstellung von $\cos x$

$$\begin{aligned} e^{n((-1)^n \cos\frac{1}{n} - 1)} &= e^{n(\cos\frac{1}{n} - 1)} = e^{n(-\frac{1}{2!}(\frac{1}{n})^2 + \frac{1}{4!}(\frac{1}{n})^4 - + \cdots)} = e^{-\frac{1}{2!}(\frac{1}{n})^1 + \frac{1}{4!}(\frac{1}{n})^3 - + \cdots} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1 . \end{aligned} \tag{34}$$