UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
19. Januar 2007

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1 Es sei $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$. Man zeige, daß die n-te Ableitung von $f(x)$ für $x \neq 0$ in der Form

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{a_{n+2}}{x^{n+2}} + \frac{a_{n+3}}{x^{n+3}} + \ldots + \frac{a_{3n}}{x^{3n}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

mit reellen Konstanten $a_k,\ k = n+2, \ldots 3n$ dargestellt werden kann.

Hinweis: Berechnen Sie die ersten drei oder vier Ableitungen explizit.

Aufgabe H2 Bestimmen Sie jeweils, wo die Funktion differenzierbar ist und berechnen Sie dort die Ableitung.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \dfrac{\sqrt{2}\,x}{1 - x^2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin(cx)} - \dfrac{2}{x}, & x \in (-\pi, \pi) \text{ und } x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (wobei $0 < |c| < 1$)

Aufgabe H3 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}$.

(a) Beweisen Sie, dass f injektiv ist und zeigen Sie $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

(b) Berechnen Sie daraus die Ableitung der Umkehrfunktion von f.

(c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie daraus erneut die Ableitung von f^{-1}.

(d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$ sowie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$.

Aufgabe H4 Auf dem Intervall $[a, b]$ sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ gegeben durch $f_j(x) = e^{\beta_j x}$ mit paarweise verschiedenen komplexe Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ (d. h. $\beta_j \neq \beta_k$ für $j \neq k$). Beweisen Sie, dass die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

Aufgabe T1 Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen konstant sind und bestimmen Sie jeweils die Konstante.

- $f(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x^{-1}) \qquad (x > 0)$
- $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{3 + 5\cos x}{5 + 3\cos x}\right) - 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\tan(\frac{1}{2}x)\right) \qquad (0 \leq x < \pi)$

— bitte wenden —

Aufgabe T2

(a) Für welche Zahlen $t \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Aussage?

$$\text{Für alle } x > 0 \text{ ist } e^x > x^t\,.$$

(b) Für welche Zahlen $a > 0$ gilt die folgende Abschätzung?

$$x^a \leq a^x \quad \text{für alle } x \geq 1$$

Aufgabe T3 Durch $f(x) := \ln(1-x)$ ist eine Funktion $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ definiert. Geben Sie eine Formel für $f^{(n)}(x)$ an ($n \in \mathbb{N}$) und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

Aufgabe T4 Berechnen Sie die Grenzwerte unter Verwendung des Mittelwertsatzes.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\big(1 - \cos\frac{1}{n}\big)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\,\big)$

(c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\delta - a^\delta}{x^\beta - a^\beta}$ (wobei $a > 0$ und $\beta \neq 0$)

Hinweis: Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung und die Aufgaben T1-T4 in den Tutorien besprochen.

Informationen zur 2.Übungsklausur:

- Die Klausur findet am **Samstag**, den **03.02.2007** von **08.00-10.00 Uhr** statt.
- Es ist **keine Anmeldung** mehr erforderlich.
- **Hörsaalverteilung:**

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
Physik/Chemie	(A-K)	HMU
Physik/Chemie	(L-Z)	HM0
ETEC/Geodäsie	(A-Z)	Audimax

- Die Klausuren können ab Dienstag, den 13.02.2007 im Sekretariat (Zi.312) abgeholt werden. Am Mittwoch, den 14.02.2007 findet von 13.15-13.45 Uhr im S 31 eine Meckerstunde statt.
- Zu den Klausuren mitzubringen sind Studienausweis und Schreibgerät; Papier wird gestellt.
- Zulässige Hilfsmittel sind alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z. B. Mitschriften, Übungsblätter, alte Klausuren). Nicht zugelassen sind einzelne Blätter und elektronische Hilfsmittel (z.B. Laptops,Taschenrechner,Mobiltelephone,...).