UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
26. Januar 2007

Lösungen zum 12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Wichtige Ableitungsregeln:

Name	Formel	Bemerkung
	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x) \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}g(x)$ $(f(x) \pm g(x))' = f(x)' \pm g(x)'$	
	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\Big(cf(x)\Big) = c\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x)$ $(cf(x))' = cf(x)'$	$c \in \mathbb{R}$ eine Konstante
Produktregel	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}g(x) + g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x)$ $(f(x) \cdot g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$	
Quotientenregel	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x) - f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}g(x)}{(g(x))^2}$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$g(x) \neq 0$
Kettenregel	Wenn $y = f(t)$ und $t = g(x)$ so gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}y = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = f'(t)\frac{dt}{dx} = f'(g(x))g'(x)$	
	Ist $x = g(y)$ die Umkehrfunktion von $y = f(x)$, so gilt $\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$	
	Ist $y = g(t)$ und $x = f(t)$, so gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ Dabei wird die Ableitung nach t durch einen Punkt bezeichnet	

Name	Formel	Bemerkung
Logarithmische Differentation	Ist $f(x) = \frac{\prod_{j=1}^{n} a_j(x)}{\prod_{j=1}^{m} b_j(x)}$ so gilt: $f'(x) = f(x)\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{a_j'(x)}{a_j(x)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j'(x)}{b(x)}\right)$	
Leibnizsche Produktregel	Für die n-te Ableitung eines Produktes $f(x)g(x)$ gilt: $(f \cdot g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$	

Ableitungen elementarer Funktionen:

Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
$f(x) = x^n$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} x^n = nx^{n-1}$		
$f(x) = e^x$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} e^x = e^x$	$f(x) = \ln(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \ln(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^{g(x)}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} e^{g(x)} = g'(x)e^{g(x)}$	$f(x) = \ln(g(x))$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \ln(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = a^x$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} a^x = \ln(a)a^x$ $a > 0$	$f(x) = \log_a(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \log_a(x) = \log_a(e)\frac{1}{x} = \frac{1}{\ln(a)x}$ $a > 0$
$f(x) = \sin(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin(x) = \cos(x)$	$f(x) = \arcsin(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\lvert x\rvert < 1$
$f(x) = \cos(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cos(x) = -\sin(x)$	$f(x) = \arccos(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\lvert x\rvert < 1$
$f(x) = \tan(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$f(x) = \arctan(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \cot(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$	$f(x) = \operatorname{arccot}(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \sinh(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sinh(x) = \cosh(x)$	$f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \operatorname{arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$f(x) = \cosh(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cosh(x) = \sinh(x)$	$f(x) = \operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\lvert x\rvert > 1$
$f(x) = \tanh(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$f(x) = \operatorname{artanh}(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $\lvert x\rvert < 1$
$f(x) = \coth(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \coth(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$f(x) = \operatorname{arcoth}(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $\lvert x\rvert > 1$

Lösung zu Aufgabe H1 Nach Hinweis in der Aufgabenstellung berechnen wir zuerst die ersten drei Ableitungen. Wir benötigen dazu die Kettenregel und die Quotienten- bzw. Produktregel. Die Funktion $f(x)$ hat die Form $f(x) = e^{g(x)}$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} (e^{g(x)})' &= g'(x)e^{g(x)} \\ (e^{g(x)})'' &= (g''(x) + (g'(x))^2)e^{g(x)} \\ (e^{g(x)})''' &= (g'''(x) + 3g'(x)g''(x) + (g'(x))^3)e^{g(x)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Mit $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ erhalten wir dann

$$g'(x) = \frac{2}{x^3},\ g''(x) = -\frac{6}{x^4},\ g'''(x) = \frac{24}{x^5}. \tag{2}$$

Allgemein kann man mit vollstndiger Induktion zeigen, daß für die n-te Ableitung von $g(x)$

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \tag{3}$$

gilt. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} \\ f''(x) &= \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \\ f'''(x) &= \left(\frac{24}{x^5} - \frac{36}{x^7} + \frac{8}{x^9}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir sehen, daß die ersten drei Ableitungen von der behaupteten Form sind. Wir zeigen deshalb die Richtigkeit der Aussage durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang:$n = 1$ Siehe oben.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n = k \geq 1$ sei die Aussage richtig, also

$$f^{(k)}(x) = \left(\frac{a_{k+2}}{x^{k+2}} + \frac{a_{k+3}}{x^{k+3}} + \ldots + \frac{a_{3k}}{x^{3k}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}. \tag{5}$$

Induktionsschluß:$k \to k+1$: durch direkte Anwendung der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f^{(k)}(x) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\left(\frac{a_{k+2}}{x^{k+2}} + \frac{a_{k+3}}{x^{k+3}} + \ldots + \frac{a_{3k}}{x^{3k}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= \left(-\frac{(k+2)a_{k+2}}{x^{k+3}} - \frac{(k+3)a_{k+3}}{x^{k+4}} - \ldots - \frac{3ka_{3k}}{x^{3k+1}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &\quad + \frac{2}{x^3}\left(\frac{a_{k+2}}{x^{k+2}} + \frac{a_{k+3}}{x^{k+3}} + \ldots + \frac{a_{3k}}{x^{3k}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

Zusammenfassung der Glieder der beiden Klammern liefert Ausdrücke der Form $\dfrac{b}{x^\alpha}$ mit $k + 3 \leq \alpha \leq 3k + 3$. Also haben wir

$$f^{k+1}(x) = \left(\frac{a_{k+3}}{x^{k+3}} + \frac{a_{k+4}}{x^{k+4}} + \ldots + \frac{a_{3k+3}}{x^{3k+3}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}. \tag{7}$$

Dies ist ein Ausdruck der geforderten Form.

Lösung zu Aufgabe H2

(a) Vorbemerkung: $f(x)$ hat die Form

$$f(x) = \ln(g(x)) + \operatorname{Arctan}(h(x)). \tag{8}$$

Damit erhalten wir mit den Ableitungregel für ln, Arctan und der Kettenregel.

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{1 + h(x)^2} \tag{9}$$

Wegen $x^2 \pm \sqrt{2}\,x + 1 = (x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}\,)^2 + \frac{1}{2} > 0$ ist der Logarithmus für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert; es gilt

$$\begin{aligned}
\left(\ln \frac{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1}\right)' &= \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1}\right)' \\
&= \frac{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1} \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{2}\,x}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1}\right)' \\
&= \frac{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1} \cdot \frac{2\sqrt{2}(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1) - 2\sqrt{2}\,x(2x - \sqrt{2}\,)}{(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)^2} \\
&= \frac{-2\sqrt{2}\,x^2 + 2\sqrt{2}}{(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)} = \frac{2\sqrt{2}(-x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2} = \frac{2\sqrt{2}(1 - x^2)}{x^4 + 1}
\end{aligned} \tag{10}$$

Das Argument von Arctan ist für $x = -1$ und für $x = 1$ nicht definiert. Für $|x| \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{2}\,x}{1 - x^2}\right)' &= \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}\,x}{1 - x^2}\right)^2\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}\,x}{1 - x^2}\right)' \\
&= \left(\frac{(1 - x^2)^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2}\right)^{-1} \cdot \frac{\sqrt{2}(1 - x^2) - \sqrt{2}\,x(-2x)}{(1 - x^2)^2} \\
&= \frac{(1 - x^2)^2}{x^4 + 1} \cdot \frac{\sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{2}}{(1 - x^2)^2} = \sqrt{2}\,\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\,.
\end{aligned}$$

Die Funktion f ist somit für $x \neq \pm 1$ differenzierbar und

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{2(x^4 + 1)} + \frac{x^2 + 1}{2(x^4 + 1)} = \frac{1}{1 + x^4}\,. \tag{11}$$

(b) Wegen der Voraussetzungen für c ist $\sin(cx) \neq 0$ für $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$. f ist differenzierbar auf $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ und dort gilt

$$f'(x) = -\frac{c\cos(cx)}{\sin^2(cx)} + \frac{2}{x^2}\,. \tag{12}$$

Die Funktion f ist auch in 0 differenzierbar, wenn

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \tag{13}$$

existiert. Weil für $x \to 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(cx)} - \frac{2}{x}\right) = \frac{x - 2\sin(cx)}{x^2\sin(cx)} = \frac{x - 2\big(cx - \frac{1}{3!}(cx)^3 + o(x^4)\big)}{x^2\big(cx - \frac{1}{3!}(cx)^3 + o(x^4)\big)}$$
$$= \frac{(1-2c)x + \frac{2}{3!}c^3x^3 + o(x^4)}{cx^3 - \frac{1}{3!}c^3x^5 + o(x^6)} = \frac{(1-2c)x^{-2} + \frac{2}{3!}c^3 + o(x)}{c - \frac{1}{3!}c^3x^2 + o(x^3)} \tag{14}$$

gilt, ist dies genau für $1 - 2c = 0$, also $c = \frac{1}{2}$, der Fall. Dann ergibt sich $f'(0) = \frac{2}{3!}c^2 = \frac{1}{12}$.

Lösung zu Aufgabe H3

(a) Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2}\cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned} 1 - (f(x))^2 &= 1 - \big(1 - 8(e^{2x}+4)^{-1}\big)^2 \\ &= 1 - \big(1 - 16(e^{2x}+4)^{-1} + 64(e^{2x}+4)^{-2}\big) \\ &= 16(e^{2x}+4)^{-1} - 64(e^{2x}+4)^{-2} \\ &= 16(e^{2x}+4)^{-2}\big((e^{2x}+4) - 4\big) \\ &= 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} \end{aligned} \tag{15}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

(b) f hat als Bildbereich $(-1,1)$, denn $(e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0,\frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\forall y \in (-1,1): \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 - (f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2}\,. \tag{16}$$

(c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned} 1 - 8(e^{2x}+4)^{-1} = y \quad &\leftrightarrow \quad (1-y)^{-1} = \tfrac{1}{8}(e^{2x}+4) \quad \leftrightarrow \quad 8(1-y)^{-1} - 4 = e^{2x} \\ &\leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}\ln\big(8(1-y)^{-1} - 4\big) \end{aligned} \tag{17}$$

Daraus ergibt sich

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8(1-y)^{-1} - 4}\cdot\frac{8}{(1-y)^2} = \frac{4}{8(1-y) - 4(1-y)^2} = \frac{4}{4-4y^2} = \frac{1}{1-y^2}\,. \tag{18}$$

(d) Es gilt $f(0) = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x - \tfrac{3}{5} \tag{19}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y - y_0) + f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y + \tfrac{15}{16}\,. \tag{20}$$

Lösung zu Aufgabe H4 Lineare Unabhängigkeit der Funktionen $f_1, \dots, f_n$ bedeutet: Die Gleichung $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$ kann nur für $a_1 = \cdots = a_n = 0$ gelten.
Induktionsanfang: Es gelte $a_1 f_1 = 0$, also $a_1 e^{\beta_1 x} = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Wegen $e^{\beta_1 x} \neq 0$ für alle x folgt dann $a_1 = 0$.
Induktionsschluss: Die Aussage sei nun für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ bewiesen und es gelte

$$a_1 e^{\beta_1 x} + \cdots + a_{n+1} e^{\beta_{n+1} x} = 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b]. \tag{$*$}$$

Ist $a_{n+1} = 0$, so folgt $a_1 = \cdots = a_n = 0$ nach Induktionsvoraussetzung. Nehmen wir nun an, es gelte $a_{n+1} \neq 0$. O.B.d.A. setzen wir dann $a_{n+1} = 1$ voraus (sonst dividiere man $(*)$ durch a_{n+1}). Division durch $e^{\beta_{n+1} x}$ liefert die Gleichung

$$a_1 e^{(\beta_1 - \beta_{n+1})x} + \cdots + a_n e^{(\beta_n - \beta_{n+1})x} = -1\,. \tag{21}$$

Leitet man diese Gleichung nach x ab, so folgt

$$a_1(\beta_1 - \beta_{n+1}) e^{(\beta_1 - \beta_{n+1})x} + a_n(\beta_n - \beta_{n+1}) e^{(\beta_n - \beta_{n+1})x} = 0\,. \tag{22}$$

Da die Zahlen $\beta_1 - \beta_{n+1}, \dots, \beta_n - \beta_{n+1}$ paarweise verschieden sind, können wir hierauf die Induktionsvoraussetzung anwenden. Diese liefert

$$a_1(\beta_1 - \beta_{n+1}) = \cdots = a_n(\beta_n - \beta_{n+1}) = 0 \tag{23}$$

und wegen $\beta_j - \beta_{n+1} \neq 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ folgt $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Wegen $a_{n+1} = 1$ besagt $(*)$ also, dass $e^{\beta_{n+1} x} = 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Dies kann nicht sein; daher war unsere Annahme $(a_{n+1} \neq 0)$ falsch.

Lösung zu Aufgabe T1

(a) Für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2} \cdot \left(-x^{-2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\,. \tag{24}$$

Da die Ableitung auf ganz $(0,\infty)$ verschwindet, ist die Funktion dort konstant. Für alle $x > 0$ gilt $f(x) = f(1) = 2\operatorname{Arctan}(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

(b) Stets gilt $-1 \leq \frac{3+5\cos x}{5+3\cos x} \leq 1$ (Ungleichungskette mit Nenner durchmultiplizieren) und für $x \in [0,\pi)$ ist $\tan(\frac{1}{2}x)$ definiert; die Definition der Funktion f ist also sinnvoll.

Betrachten wir zunächst den Arcustangens. Mit der Kettenregel ergibt sich wegen $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$ und $\operatorname{Arctan}'(x) = (1+x^2)^{-1}$

$$\begin{aligned}\Big(\operatorname{Arctan}\big(\tfrac{1}{2}\tan(\tfrac{1}{2}x)\big)\Big)' &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}\tan^2(\frac{1}{2}x)} \cdot \tfrac{1}{2}(1+\tan^2(\tfrac{1}{2}x)) \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= \frac{1+\tan^2(\frac{1}{2}x)}{4+\tan^2(\frac{1}{2}x)} \cdot \frac{\cos^2(\frac{1}{2}x)}{\cos^2(\frac{1}{2}x)} = \frac{\cos^2(\frac{1}{2}x)+\sin^2(\frac{1}{2}x)}{4\cos^2(\frac{1}{2}x)+\sin^2(\frac{1}{2}x)} = \frac{1}{4\cos^2(\frac{1}{2}x)+\sin^2(\frac{1}{2}x)}\end{aligned} \tag{25}$$

für alle $x \in (0,\pi)$. Jetzt zum Arcuscosinus: Zunächst brauchen wir die Ableitung von Arccos. Für alle $x \in (0,\pi)$ gilt $\sin x > 0$ und damit $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Für alle $y \in (-1,1)$ ist $\operatorname{Arccos} y \in (0,\pi)$; wegen $\cos'(x) = -\sin x \neq 0$ für $x \in (0,\pi)$ folgt somit

$$\operatorname{Arccos}'(y) = \frac{1}{-\sin(\operatorname{Arccos} y)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\operatorname{Arccos} y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,. \tag{26}$$

Damit erhalten wir für $x \in (0,\pi)$

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right)\right)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right)' \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{(5+3\cos x)^2-(3+5\cos x)^2}{(5+3\cos x)^2}}} \cdot \frac{-5\sin x(5+3\cos x)-(3+5\cos x)(-3\sin x)}{(5+3\cos x)^2} \\ &= -\frac{5+3\cos x}{\sqrt{16-16\cos^2 x}} \cdot \frac{-16\sin x}{(5+3\cos x)^2} = \frac{4\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}\,(5+3\cos x)}\,;\end{aligned}$$

wegen $x \in (0,\pi)$ gilt wieder $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$, also

$$\begin{aligned}&= \frac{4}{5+3\cos x} = \frac{4}{5(\sin^2(\frac{1}{2}x)+\cos^2(\frac{1}{2}x))+3(\cos^2(\frac{1}{2}x)-\sin^2(\frac{1}{2}x))} \\ &= \frac{2}{4\cos^2(\frac{1}{2}x)+\sin^2(\frac{1}{2}x)}\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Insgesamt: $f'(x) = 0$ auf $(0,\pi)$. (Beachte: f ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.) Da f auf $[0,\pi)$ stetig ist, ist f dort konstant mit $f(x) = f(0) = \operatorname{Arccos}(\frac{8}{8}) - 2\operatorname{Arctan}(0) = 0$.

Lösung zu Aufgabe T2

(a) Für $t < 0$ trifft die Aussage nicht zu, denn in diesem Falle gilt $x^t \to \infty$ für $x \to 0$. Für $t = 0$ ist sie hingegen offenbar richtig.

Wir müssen im folgenden also nur noch den Fall $t > 0$ betrachten: Logarithmieren wir die Abschätzung $e^x > x^t$, so ergibt sich

$$x > \ln(x^t) = t \ln x, \qquad \text{also} \qquad t^{-1} > \frac{\ln x}{x}. \tag{28}$$

Setzen wir $g(x) := (\ln x)/x$, so lässt sich unsere Frage wie folgt umformulieren: Für welche $t > 0$ nimmt g nur Werte $< t^{-1}$ an?

Für $x \in (0, 1]$ gilt $g(x) \leq 0$. Aus $g'(x) = (\frac{1}{x} \cdot x - \ln x)/x^2 = (1 - \ln x)/x^2$ können wir folgendes schließen: Für $x \in (1, e)$ ist $g(x) > 0$, also g monoton steigend, für $x \in (e, \infty)$ ist $g(x) < 0$, also g monoton fallend. Die Funktion erreicht ihr Maximum somit an der Stelle $x = e$ mit $g(e) = e^{-1}$. Also: Genau dann nimmt g nur Werte $< t^{-1}$ an, wenn $e^{-1} < t^{-1}$, also $e > t$.

Die Antwort auf die Frage lautet: Die Aussage gilt genau dann, wenn $0 \leq t < e$.

(b) Logarithmieren der Abschätzung liefert

$$a \ln x \leq x \ln a, \quad \text{also} \quad \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln a}{a}. \tag{29}$$

Nach obigen Überlegungen gilt dies genau dann für alle $x \geq 1$, wenn $(\ln a)/a \geq e^{-1}$, da $\max_{x \geq 1} (\ln x)/x = e^{-1}$. Wiederum nach den obigen Überlegungen bedeutet dies $a = e$.

Lösung zu Aufgabe T3 Wir bilden einige Ableitungen:

$$f'(x) = -(1-x)^{-1},\ f''(x) = -(1-x)^{-2},\ f'''(x) = -2(1-x)^{-3},\ f^{(4)}(x) = -6(1-x)^{-4}. \tag{30}$$

Dann stellen wir die folgende Behauptung auf:

$$f^{(n)}(x) = -(n-1)!\,(1+x)^{-n}. \tag{31}$$

Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion. Den Induktionsanfang haben wir gerade schon gemacht. Nun noch der Induktionsschluss: Gilt die Formel für ein gewisses n, so folgt durch Ableiten

$$f^{(n+1)}(x) = -(n-1)!\,\big(-n(1-x)^{-n-1}\big)(-1) = -n!\,(1-x)^{-(n+1)}. \tag{32}$$

Lösung zu Aufgabe T4

(a) Wir betrachten die Funktion f, die durch $f(x) = \cos x$ gegeben ist. Zu jedem $x > 0$ existiert dann laut Mittelwertsatz ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \quad \text{also} \quad -\sin \xi = \frac{\cos x - 1}{x}. \tag{33}$$

Insbesondere gibt es zu $x_n = \frac{1}{n}$ ein solches ξ_n. Dann gilt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$n\big(1 - \cos \tfrac{1}{n}\big) = \frac{1 - \cos x_n}{x_n} = \sin \xi_n \xrightarrow{n \to \infty} \sin 0 = 0. \tag{34}$$

(b) Hier nehmen wir $f(y) = \cos\sqrt{y}$. Zu jedem x existiert dann ein $\xi \in (x-1, x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi), \quad \text{also} \quad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}\,. \tag{35}$$

Also ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\,\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\xi}} \tag{36}$$

und da für $x \to \infty$ auch $\xi \to \infty$ gilt, ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

(c) Hier sei $f(x) := x^\beta$ und $g(x) := x^\delta$. Zu $x \neq a$ gibt es dann ξ zwischen a und x mit

$$\frac{x^\delta - a^\delta}{x^\beta - a^\beta} = \frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{\delta\xi^{\delta-1}}{\beta\xi^{\beta-1}} = \frac{\delta\xi^{\delta-\beta}}{\beta}\,. \tag{37}$$

Für $x \to a$ gilt auch $\xi \to a$ und der Quotient strebt gegen $(\delta/\beta)a^{\delta-\beta}$.