UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
8. Februar 2007

Lösungen zum 14. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösung zu Aufgabe H1 Zuerst bestimmen wir die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Wir wissen die Potenzreihenentwicklung von e^x. Wir haben als

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \Longrightarrow e^x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} x^{l+1} = x + \frac{1}{2} x^2 + \dots \tag{1}$$

Daraus folgt dann die Potenzreihendarstellung von $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k. \tag{2}$$

Bemerkung: Mit der Regel von L'Hopital erhalten wir $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Die Funktion $f(x)$ kann man zu einer analytischen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ erweitern, wobei $f(0) = 1$ ist.

Betrachten wir jetzt $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x}{e^x - 1}$ mit $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{B_k}{k!} x^k$. Es muß also gelten $g(x) f(x) = 1$. Daraus folgt aber mit den Potenzreihendarstellungen

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} \right) x^k. \tag{3}$$

Dies bedeutet:

$$1 = B_0 + \left(\frac{1}{2} B_0 + B_1 \right) x + \left(\frac{1}{6} B_0 + \frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{2} B_2 \right) x^2 + \left(\frac{1}{4} B_0 + \frac{1}{3} B_1 + \frac{1}{4} B_2 + \frac{1}{6} B_3 \right) x^3 \dots \tag{4}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_1 &= -\frac{1}{2} B_0 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= -\left(\frac{1}{3}B_0 + B_1\right) = -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \quad (5) \\ B_3 &= \left(\frac{1}{4}B_0 + B_1 + \frac{3}{4}B_2\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0 \\ &\vdots \quad (6) \end{aligned}$$

oder die allgemeine Formel

$$B_0 = 1;\ B_k = -\sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l+1)!} B_l. \quad (7)$$

Die Zahlen B_k werden **Bernoullische Zahlen genannt** und es ist:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, \ldots \\ B_1 &= -\frac{1}{2}, B_3 = B_5 = \ldots = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe H2 Berechnen wir zunächst I_0:

$$I_0 = \int_0^\beta e^{-x}\,dx = (-e^{-x})\big|_{x=0}^{\beta} = -e^{-\beta} + e^{-0} = 1 - e^{-\beta}\,.$$

Nun sei $n \geq 1$ beliebig. Produktintegration mit $f(x) = x^n$ und $g'(x) = e^{-x}$ liefert

$$I_n = \int_0^\beta x^n e^{-x}\,dx = x^n(-e^{-x})\big|_{x=0}^{\beta} - \int_0^\beta n x^{n-1}(-e^{-x})\,dx = -\beta^n e^{-\beta} + nI_{n-1}\,.$$

Mit dieser Rekursionsformel berechnen wir einige weitere Integrale:

$$\begin{aligned} &I_1 = -\beta e^{-\beta} + I_0, \\ &I_2 = -\beta^2 e^{-\beta} + 2I_1 = -e^{-\beta}(\beta^2 + 2\beta) + 2I_0, \\ &I_3 = -\beta^3 e^{-\beta} + 3I_2 = -e^{-\beta}(\beta^3 + 3\beta^2 + 6\beta) + 6I_0 \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} I_n &= -e^{-\beta}(\beta^n + n\beta^{n-1} + n(n-1)\beta^{n-2} + \cdots + n(n-1)\cdots 2\,\beta) + n!\,I_0 \\ &= -e^{-\beta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!}\beta^{n-k} + n!\,I_0 \end{aligned}$$

lautet, und zeigen dies mit vollständiger Induktion: Für $n = 0$ ist die Formel richtig; ist sie für ein $n \geq 0$ bewiesen, so folgt

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= -\beta^{n+1}e^{-\beta} + (n+1)I_n = -\beta^{n+1}e^{-\beta} + (n+1)\Big(-e^{-\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!}\beta^{n-k} + n!\, I_0\Big) \\
&= -e^{-\beta}\Big(\beta^{n+1} + (n+1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!}\beta^{n-k}\Big) + (n+1)!\, I_0 \\
&= -e^{-\beta}\Big(\beta^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{(n-(k-1))!}\beta^{n-(k-1)}\Big) + (n+1)!\, I_0 \\
&= -e^{-\beta}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}\beta^{n+1-k}\Big) + (n+1)!\, I_0\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen, und wir erhalten

$$I_n = -e^{-\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!}\beta^{n-k} + n!\,(1-e^{-\beta}) \xrightarrow{\beta\to\infty} n!$$

Lösung zu Aufgabe H3

(a) Betrachten wir zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned}
\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\, dx &= -\cos x\Big|_{x=(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi) + \cos((k-1)\pi) \\
&= -(-1)^k + (-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}\,.
\end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat, ist $\sin x$ auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder ≥ 0 oder ≤ 0. Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\, dx = \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\, dx\right| = 2\,.$$

(b) Wegen $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$ ist $\frac{1}{2}\sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x\cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\, dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{x=0}^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}\big(\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi) - \sin^2(0)\big) = \tfrac{1}{2}(1-0) = \tfrac{1}{2}\,.$$

(c) Auch hier kann man die Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\, dx &= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}\, dx \\
&= -\tfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}\,\Big|_{x=0}^{1} = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{9}\,) = \tfrac{1}{4}(3-\sqrt{5}\,)
\end{aligned}$$

(d) Wir setzen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ voraus, denn sonst ist die zu integrierende Funktion nicht definiert. Im Falle $a = 1$ ist $\operatorname{Arcsin} x$ eine Stammfunktion des Integranden; für beliebiges $a > 0$ formen wir geeignet um:

$$\begin{aligned}\int_0^{a/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int_0^{a/2} \frac{1}{a\sqrt{1-(x/a)^2}}\,dx &= \operatorname{Arcsin}(x/a)\Big|_{x=0}^{a/2} \\ &= \operatorname{Arcsin}(\tfrac{1}{2}) - \operatorname{Arcsin}(0) = \tfrac{1}{6}\pi\end{aligned}$$

Für $a < 0$ ergibt sich ganz analog der Wert $-\frac{1}{6}\pi$, da man dann einen Faktor $-a$ aus der Wurzel herauszieht.

(e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $\varphi(t) = \sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $\varphi'(t)\,dt = (2\sqrt{t}\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t = 1$ entspricht $x = \varphi(1) = 1$ und $t = 4$ entspricht $x = \varphi(4) = 2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x}\,dx = 2\ln|1+x|\,\Big|_{x=1}^{2} = 2\big(\ln(3) - \ln(2)\big) = 2\ln\tfrac{3}{2}\end{aligned}$$

(f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir Produktintegration für $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = x$. Mit $f'(x) = x^{-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \int_1^e f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=1}^{e} - \int_1^e f'(x)g(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x\Big|_{x=1}^{e} - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2\ln e - \ln 1) - \int_1^e \tfrac{1}{2}x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \big(\tfrac{1}{4}x^2\Big|_{x=1}^{e}\big) = \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe H4

(a) Die Aufgabe war anders gedacht: Vor dem Integral sollte noch der Faktor x^{-1} stehen. Zu jedem hinreichend kleinen $x \neq 0$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein ξ zwischen x und $2x$ mit

$$\int_x^{2x} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+\xi^2}\int_x^{2x} \cos t\,dt = \frac{1}{1+\xi^2}\,\sin t\Big|_{t=x}^{2x} = \frac{\sin(2x) - \sin x}{1+\xi^2}\,.$$

(x muss klein sein, damit $\cos x \geq 0$ zwischen x und $2x$ gilt.) Für $x \to 0$ gilt auch $\xi \to 0$ und damit $1 + \xi^2 \to 1$. Folglich haben wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{\cos t}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x) - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin x}{x}\right) = 2 - 1 = 1\,.$$

(Hieraus folgt insbesondere: Der Grenzwert, der auf dem Übungsblatt stand, also ohne den Faktor x^{-1}, ist 0.)

(b) Zu untersuchen ist hier $f(x)/g(x)$ für $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$ und $g(x) = x^{-1}e^{x^2}$. Wir wenden die Regel von de l'Hospital an: Der zu untersuchende Grenzwert ist vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$" (Beachte: für $x \geq 0$ gilt $f(x) \geq x$ wegen $e^{x^2} \geq 1$) und wegen

$$f'(x) = e^{x^2}, \qquad g'(x) = -x^{-2}e^{x^2} + x^{-1} \cdot 2xe^{x^2} = (2 - x^{-2})e^{x^2}$$

gilt: Die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x stets $\neq 0$ und der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{(2 - x^{-2})e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 - x^{-2}} = \frac{1}{2}$$

existiert. Folglich ist auch der zu untersuchende Grenzwert $\frac{1}{2}$.