Lösung zu Aufgabe T1 Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Beachte: auf Intervallen der Form $[\sqrt{k\pi}, \sqrt{(k+1)\pi}\,]$ wechselt $\sin(x^2)$ nicht das Vorzeichen) existiert eine Zahl ξ_k zwischen $\sqrt{k\pi}$ und $\sqrt{(k+1)\pi}$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \frac{x\sin(x^2)}{x}\,dx = \frac{1}{\xi_k}\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x\sin(x^2)\,dx\,.$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass das letzte Integral den Wert $(-1)^k$ hat. Dazu substituieren wir $t = x^2$. Dies liefert $dt = 2x\,dx$ und damit

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x\sin(x^2)\,dx = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \tfrac{1}{2}\sin(t)\,dt\,.$$

Wie wir in der Lösung zu **2 a)** sahen, ergibt dieses Integral tatsächlich den Wert $(-1)^k$.

Lösung zu Aufgabe T2

(a) Die Behauptung ist gezeigt, wenn wir beweisen, dass $\int_0^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2)\,dx$ für $\alpha \to \infty$ konvergiert. Sei also $\alpha \geq 1$ beliebig. Mit $[\alpha]$ bezeichnen wir die größte natürliche Zahl, die noch $\leq \alpha$ ist. Es ergibt sich

$$\int_0^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,dx + \sum_{k=1}^{[\alpha]-1}\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx + \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2)\,dx\,.$$

Die hier auftretende Summe lässt sich gemäß **4** schreiben als

$$\sum_{k=1}^{[\alpha]-1} \frac{(-1)^k}{\xi_k}, \qquad \text{mit } \xi_k \text{ zwischen } \sqrt{k\pi} \text{ und } \sqrt{(k+1)\pi}.$$

Die Summe konvergiert also für $\alpha \to \infty$ nach dem Leibnizkriterium. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass auch das hintere Integral konvergiert. Die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} \sin(x^2)\,dx\right| \leq \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} |\sin(x^2)|\,dx \leq \int_{\sqrt{[\alpha]\pi}}^{\sqrt{\alpha\pi}} 1\,dx &= \sqrt{\alpha\pi} - \sqrt{[\alpha]\pi} \\ &= \frac{\alpha\pi - [\alpha]\pi}{\sqrt{\alpha\pi} + \sqrt{[\alpha]\pi}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\pi} + \sqrt{[\alpha]\pi}}\end{aligned}$$

zeigt, dass dieses Integral für $\alpha \to \infty$ gegen 0 strebt.

(b) Wir substituieren $t = x^2$. Mit $dt = 2x\,dx$ erhalten wir

$$\int_0^{\beta} 2x\sin(x^4)\,dx = \int_0^{\beta^2} \sin(t^2)\,dt\,.$$

Gemäß **a)** konvergiert dieser Term für $\beta \to \infty$.

Lösung zu Aufgabe T3

(a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \tfrac{1}{8}(1+2x)^4\Big|_{x=0}^1 = \tfrac{1}{8}(3^4-1^4) = 10\,.$$

(b) Wir verwenden Produktintegration mit $f(t) = \operatorname{Arcsin} t$ und $g'(t) = 1$.

$$\begin{aligned}\int^x \operatorname{Arcsin} t\,dt &= \int^x 1\cdot \operatorname{Arcsin} t\,dt = x\operatorname{Arcsin} x - \int^x t(\operatorname{Arcsin} t)'\,dt \\ &= x\operatorname{Arcsin} x - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = x\operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Folglich ist jede der Funktionen $F_c(x) = x\operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, eine Stammfunktion des Arcussinus – und es gibt keine weiteren Stammfunktionen.

(c) Wieder kommt Produktintegration zum Einsatz: $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx &= \sin x\cdot(-\cos x)\Big|_{x=0}^\pi - \int_0^\pi \cos x\cdot(-\cos x)\,dx = \int_0^\pi (\cos x)^2\,dx \\ &= \int_0^\pi \big(1-(\sin x)^2\big)\,dx = \pi - \int_0^\pi (\sin x)^2\,dx\end{aligned}$$

Betrachtet man nun den ersten und letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \pi, \quad \text{also} \quad \int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

(d) Hier substituieren wir $u = e^t$. Dies liefert $du = e^t\,dt$ und damit

$$\int^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt = \int^{e^x} \frac{1}{u^2+1}\,du = \operatorname{Arctan} u\Big|_{u=e^x} = \operatorname{Arctan}(e^x)\,.$$

(e) Wir substituieren $u = 1-t$. Dies liefert $du = -dt$, also

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t}}\,dt &= \int^{1-x} \frac{1-u}{\sqrt{u}}(-1)\,du = \int^{1-x} (u^{1/2}-u^{-1/2})\,du = \tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\Big|_{u=1-x} \\ &= \tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2}\,.\end{aligned}$$

(f) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d. h. $x = t^2$. Mit $dx = 2t\,dt$ folgt

$$\int_1^4 \operatorname{Arctan}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx = \int_1^2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{t-1}\,)\cdot 2t\,dt;$$

nun substituieren wir erneut: $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2+1$, $dt = 2u\,du$,

$$= \int_0^1 \operatorname{Arctan}(u)\cdot 2(u^2+1)\cdot 2u\,du = \int_0^1 (4u^3+4u)\operatorname{Arctan} u\,du\,.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.) Dann führen wir eine Produktintegration aus mit $f(u) = \operatorname{Arctan} u$ und $g'(u) = 4u^3 + 4u$:

$$
\begin{aligned}
&= (u^4 + 2u^2) \operatorname{Arctan} u \Big|_{u=0}^{1} - \int_0^1 (u^4 + 2u^2) \frac{1}{1+u^2}\, du \\
&= 3 \operatorname{Arctan}(1) - \int_0^1 \frac{(u^2+1)^2 - 1}{1+u^2}\, du = \tfrac{3}{2}\pi - \int_0^1 (u^2+1)\, du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\, du \\
&= \tfrac{3}{4}\pi - \left(\tfrac{1}{3}u^3 + u\right)\Big|_{u=0}^{1} + \operatorname{Arctan} u \Big|_{u=0}^{1} = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4}\pi = \pi - \tfrac{4}{3}
\end{aligned}
$$

(g) Gemäß Additionstheorem gilt

$$
\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2t}{1 - \sin t}\, dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2 \sin t \cos t}{1 - \sin t}\, dt;
$$

daher liefert die Substitution $x = \sin t$, $dx = \cos t\, dt$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2x}{1-x}\, dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2(x-1)+2}{1-x}\, dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} -2\, dx + \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{2}{1-x}\, dx \\
&= -2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\right) - 2 \ln|1-x| \Big|_{x=1/2}^{\sqrt{3}/2} = 1 - \sqrt{3} - 2\big(\ln(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,) - \ln(1 - \tfrac{1}{2})\big) \\
&= 1 - \sqrt{3} - 2 \ln(2 - \sqrt{3}\,).
\end{aligned}
$$

(h) Wir betrachten das Polynom unter der Wurzel:

$$
2 + 4t - t^2 = -(t-2)^2 + 6 = 6\big(1 - \tfrac{1}{6}(t-2)^2\big)
$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2+4t-t^2}}\, dt &= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - (t-2)^2/6}}\, dt = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{t-2}{\sqrt{6}}\right)\Bigg|_{t=0}^{2} \\
&= \operatorname{Arcsin}(0) - \operatorname{Arcsin}(-2/\sqrt{6}) = \operatorname{Arcsin}(2/\sqrt{6}) = \operatorname{Arcsin}(\tfrac{1}{3}\sqrt{6}).
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe T4 Wir haben

$$
J = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1} + \sqrt{e^x + 1}} \quad !
$$

und erweitern den Integranden mit $\sqrt{e^x - 1} - \sqrt{e^x + 1}$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2} \int (\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x - 1}) dx \\
&= \frac{1}{2} \int (\sqrt{e^x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{e^x - 1}) dx \\
&= J_1 - J_2. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Zuerst betrachten wir das Integral $J_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \sqrt{e^x-1})dx$.

Mit $t=\sqrt{e^x-1}$ und $t^2=e^x-1,\ e^x=1+t^2,\ e^x dx = 2tdt$ bzw. $dx=\dfrac{2t}{1+t^2}dt$ erhält man

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{1}{2}\int \sqrt{e^x-1})dx = \int \frac{t^2}{1+t^2}dt \\
&= \int 1dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt \\
&= t - \arctan(t) \\
&= \sqrt{e^x-1} - \arctan(\sqrt{e^x-1}). \qquad (10)
\end{aligned}$$

Für das Integral $J_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \sqrt{e^x+1}dx$ erhalten wir mit der Substitution $v=\sqrt{e^x+1}$ und $v^2=e^x+1, e^x=v^2-1$. Da $e^x>0$ ist für alle $x\in\mathbb{R}$ muß $v>1$ sein. Weiter haben wir $e^x dx = 2vdv$ bzw. $dx = \dfrac{2v}{v^2-1}dv$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}\int \sqrt{e^x+1}dx = \int \frac{v^2}{v^2-1}dv \\
&= \int 1dv + \int \frac{1}{v^2-1}dv = \int dv + \int \frac{dv}{(v-1)(v+1)}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Jetzt führen wir eine kleine Nebenrechnung durch:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v^2-1} &= \frac{1}{(v-1)(v+1)} = \frac{A}{v-1} + \frac{B}{v+1} \\
&\Longleftrightarrow \\
1 &= A(v+1) + B(v-1) \\
&\Longleftrightarrow \\
A &= \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2} \qquad (12)
\end{aligned}$$

Also

$$\frac{1}{v^2-1} = \frac{1}{(v-1)(v+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{v-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{v+1}. \qquad (13)$$

Daraus erhalten wir mit $v>1$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int dv + \frac{1}{2}\int \frac{1}{v-1}dv - \frac{1}{2}\int \frac{1}{v+1}dv \\
&= v + \frac{1}{2}\ln(v-1) - \frac{1}{2}\ln(v+1) \\
&= v + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{v-1}{v+1}\right) \\
&= \sqrt{e^x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right). \qquad (14)
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned}
J &= J_1 - J_2 \\
&= \sqrt{e^x+1} - \sqrt{e^x-1} + + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right) + \arctan(\sqrt{e^x-1}). \qquad (15)
\end{aligned}$$