UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
8. Februar 2007

15. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1 Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx\,,$$

indem Sie die Substitution $t = \tan(x/2)$ verwenden.

Aufgabe H2 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int^x \frac{t^5 + 5t^4 + t^3 - 13t^2 - t + 9}{t^3 + 2t^2 - t - 2}\, dt$

b) $\displaystyle\int^y \frac{1}{\sqrt{2t-1} - \sqrt[3]{2t-1}}\, dt$

c) $\displaystyle\int^x \frac{3e^{3s} + 2e^{2s} + 6e^s - 10}{2e^{3s} + 4e^{2s} + 10e^s}\, ds$

d) $\displaystyle\int^t \frac{3u - u^3 - 3}{(u^2 - 2u + 2)^2}\, du$

Aufgabe H3 Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)e^{nx}$$

konvergiert. Bestimmen Sie für diese x den Wert der Reihe.

Aufgabe H4 Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{y \ln y}{\sinh y - y}\, dy$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{sx} \cos(tx)\, dx \quad (s < 0,\ t \in \mathbb{R})$

d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{(2x-1)^2}\, dx$

Aufgabe F1 Bestimmen Sie sämtliche Stammfunktionen von

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Hinweis: Substituieren Sie zunächst $x = \sinh y - 1$.

Aufgabe F2 Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz, gegebenenfalls in Abhängigkeit vom Parameter a.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} \ln(1+t)\, dt$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{\cosh x - 1}}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{1} (\ln x)^4\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^a}{e^t - 1}\, dt$

— bitte wenden —

Aufgabe F3 Bestimmen Sie

a) $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x,\ a,b>0$

b) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{\sin x\cos x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-inx}\,\mathrm{d}x, \quad m,n\in\mathbb{N}$

Aufgabe F4

a) Berechnen Sie für die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(x)$ die Werte $\Gamma\left(\pm\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\pm\frac{3}{2}\right)$ und $\Gamma\left(\pm\frac{5}{2}\right)$. Verwenden Sie dabei ohne Beweis: $\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionalgleichung

$$x\cdot\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$$

für alle $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(-\frac{2k-1}{2}\right)=(-1)^k\cdot\pi$$

Hinweis: Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung besprochen.

Hinweise zur Vordiplomsklausuren im Frühjahr 2007 in HM I

- **Termin:** 15. März 2007 (Donnerstag), 8 – 10 Uhr.
- Zulässige Hilfsmittel: alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z. B. Mitschriften, Übungsblätter, alte Klausuren).
- **Nicht zugelassen** sind dagegen einzelne Blätter und elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Laptops, Handys).
- Die **Anmeldung** erfolgt durch Abgabe des Prüfungsscheins beim Sekretariat des Lehrstuhls (Mathematikgebäude, Zimmer 312). Den Prüfungsschein erhalten Sie beim Prüfungsamt der Universität.
- **Anmeldeschluss:** 16. Februar 2007 (Freitag), 11.30 Uhr. Danach sind keine An- und Abmeldungen mehr möglich.
- Die Hörsaalverteilung wird ab 05. März 2007(Montag) durch Aushang neben Zi 312 sowie im Internet unter

  `http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/hv.html`

  bekannt gegeben.