UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
9. Februar 2007

Lösungen zum 9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösung zu Aufgabe H1 Wenn wir die empfohlene Substitution benutzen wollen, müssen wir $\sin x$ und $\cos x$ mittels $t = \tan(x/2)$ ausdrücken. Nun gilt wegen der Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{\tan^2(x/2)+1} = \frac{2t}{1+t^2}\,, \\
\cos x &= \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{\tan^2(x/2)+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.
\end{aligned}$$

Aus $x = 2\operatorname{Arctan} t$ ergibt sich zudem

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,.$$

Nun können wir das Integral berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^{-1} \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{2}{2t+1-t^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{2}{-(t-1)^2+2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1-(\frac{t-1}{\sqrt{2}})^2}\,dt\,,
\end{aligned}$$

mit der Substitution $s = (t-1)/\sqrt{2}$ folgt

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^0 \frac{1}{1-s^2}\sqrt{2}\,ds = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1/\sqrt{2}}^0 \left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right) ds \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\big(\ln|1+s| - \ln|1-s|\big)\Big|_{-1/\sqrt{2}}^0 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\big(\ln(1-1/\sqrt{2}\,) - \ln(1+1/\sqrt{2}\,)\big) \\
&= -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\ln\frac{1-1/\sqrt{2}}{1+1/\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\,.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe H2

(a) Zunächst führen wir eine Polynomdivision durch: Diese liefert

$$f(t) := \frac{t^5+5t^4+t^3-13t^2-t+9}{t^3+2t^2-t-2} = t^2+3t-4+\frac{t+1}{t^3+2t^2-t-2}\,.$$

Dann zerlegen wir den Nenner in Linearfaktoren:

$$t^3 + 2t^2 - t - 2 = (t-1)(t^2+3t+2) = (t-1)(t+1)(t+2)$$

Folglich gilt

$$f(t) = t^2 + 3t - 4 + \frac{t+1}{(t-1)(t+1)(t+2)} = t^2 + 3t - 4 + \frac{1}{(t-1)(t+2)}\,.$$

Für den verbleibenden Bruch machen wir nun den Ansatz

$$\frac{1}{(t-1)(t+2)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+2}\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $t-1$ und setzen dann $t=1$ ein, so folgt $\frac{1}{3} = a$; Multiplizieren mit $t+2$ und Einsetzen von $t=-2$ liefert $-\frac{1}{3} = b$. Also haben wir

$$f(t) = t^2 + 3t - 4 + \frac{1/3}{t-1} - \frac{1/3}{t+2}$$

und erhalten daraus

$$\int^x f(t)\,dt = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 4x + \tfrac{1}{3}\ln|x-1| - \tfrac{1}{3}\ln|x+2| = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 4x + \tfrac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{|x+2|}\,.$$

(b) Hier substituieren wir zunächst $x = \sqrt[6]{2t-1}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int^y \frac{1}{\sqrt{2t-1} - \sqrt[3]{2t-1}}\,dt &= \int^{\sqrt[6]{2y-1}} \frac{1}{x^3 - x^2}\cdot 3x^5\,dx = \int^{\sqrt[6]{2y-1}} \frac{3x^3}{x-1}\,dx \\ &= 3\int^{\sqrt[6]{2y-1}} \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)dx = x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + 3x + 3\ln|x-1|\,\Big|_{x=\sqrt[6]{2y-1}} \\ &= \sqrt{2y-1} + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2y-1} + 3\sqrt[6]{2y-1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2y-1} - 1\right|\,.\end{aligned}$$

(c) Die Substitution $t = e^s$ (also $s = \ln t$, $ds = t^{-1}\,dt$) führt auf

$$\int^x \frac{3e^{3s} + 2e^{2s} + 6e^s - 10}{2e^{3s} + 4e^{2s} + 10e^s}\,ds = \int^{e^x} \frac{3t^3 + 2t^2 + 6t - 10}{2t^3 + 4t^2 + 10t}\,\frac{dt}{t} = \int^{e^x} \frac{3t^3 + 2t^2 + 6t - 10}{2t^2(t^2+2t+5)}\,dt$$

Wegen $t^2 + 2t + 5 = (t+1+2i)(t+1-2i)$ gilt: Der Nenner dieses Bruchs hat 0 als doppelte Nullstelle und $-1+2i$ sowie $-1-2i$ als einfache. Wir machen daher den Ansatz

$$\frac{3t^3 + 2t^2 + 6t - 10}{t^2(t+1-2i)(t+1+2i)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t+1-2i} + \frac{d}{t+1+2i}\,.$$

Fassen wir die beiden letzten Brüche zusammen, so bedeutet dies

$$\frac{3t^3 + 2t^2 + 6t - 10}{t^2(t^2+2t+5)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+2t+5}$$

mit gewissen Konstanten C und D. Multiplikation mit $t^2(t^2+2t+5)$ führt auf

$$3t^3 + 2t^2 + 6t - 10 = at(t^2+2t+5) + b(t^2+2t+5) + (Ct+D)t^2$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ergibt

$$(a+C)t^3 + (2a+b+D)t^2 + (5a+2b)t + 5b$$

und Vergleich mit der linken liefert $b=-2$, $a=2$, $C=1$, $D=0$. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int^{e^x}\left(\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}+\frac{t}{t^2+2t+5}\right)dt\\
&\quad=\frac{1}{2}\int^{e^x}\left(\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}+\frac{2t+2}{2(t^2+2t+5)}-\frac{1}{t^2+2t+5}\right)dt\\
&\quad=\ln|t|+t^{-1}+\tfrac{1}{4}\ln(t^2+2t+5)\Big|_{t=e^x}-\frac{1}{8}\int^{e^x}\frac{1}{1+(\frac{t+1}{2})^2}\,dt\\
&\quad=x+e^{-x}+\tfrac{1}{4}\ln(e^{2x}+2e^x+5)-\tfrac{1}{4}\operatorname{Arctan}\left(\frac{e^x+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

(d) Wegen $u^2-2u+2=(u-1-\sqrt{3}i)(u-1+\sqrt{3}i)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{3u-u^3-3}{(u^2-2u+2)^2}=\frac{a}{u-1-\sqrt{3}i}+\frac{b}{(u-1-\sqrt{3}i)^2}+\frac{c}{u-1+\sqrt{3}i}+\frac{d}{(u-1+\sqrt{3}i)^2}\,.$$

Fassen wir hier den ersten und dritten Bruch zusammen, erhalten wir $\frac{\alpha u+\beta}{u^2-2u+2}$ mit gewissen Konstanten α und β. Fassen wir den zweiten und vierten Bruch zusammen, ergibt sich $\frac{\gamma u^2+\delta u+\varepsilon}{(u^2-2u+2)^2}=\frac{\gamma(u^2-2u+2)+(\delta+2\gamma)u+\varepsilon-2\gamma}{(u^2-2u+2)^2}=\frac{\gamma}{u^2-2u+2}+\frac{(\delta+2\gamma)u+\varepsilon-2\gamma}{(u^2-2u+2)^2}$ mit gewissen Konstanten γ, δ und ε. Insgesamt kommen wir zu einem Ansatz der Form

$$\frac{3u-u^3-3}{(u^2-2u+2)^2}=\frac{Au+B}{u^2-2u+2}+\frac{Cu+D}{(u^2-2u+2)^2}\,.$$

Multiplikation mit $(u^2-2u+2)^2$ liefert $-u^3+3u-3=(Au+B)(u^2-2u+2)+Cu+D$, also

$$-u^3+3u-3=Au^3+(B-2A)u^2+(2A-2B+C)u+2B+D\,.$$

Es folgt: $A=-1$, $B=-2$, $C=1$ und $D=1$. Also:

$$\begin{aligned}
&\int^t\frac{3u-u^3-3}{(u^2-2u+2)^2}\,du=\int^t\left(\frac{-u-2}{u^2-2u+2}+\frac{u+1}{(u^2-2u+2)^2}\right)du\\
&\quad=-\frac{1}{2}\int^t\frac{2u-2}{u^2-2u+2}\,du-3\int^t\frac{1}{1+(u-1)^2}\,du\\
&\qquad+\frac{1}{2}\int^t\frac{2u-2}{(u^2-2u+2)^2}\,du+\int^t\frac{2}{(1+(u-1)^2)^2}\,du\\
&\quad=-\tfrac{1}{2}\ln(t^2-2t+2)-3\operatorname{Arctan}(t-1)-\frac{1/2}{t^2-2t+2}+\frac{t-1}{1+(t-1)^2}+\operatorname{Arctan}(t-1)\\
&\quad=-\tfrac{1}{2}\ln(t^2-2t+2)-2\operatorname{Arctan}(t-1)+\frac{t-3/2}{t^2-2t+2}
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde hier benutzt, dass laut Vorlesung gilt:

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx=\frac{1}{2k}\frac{x}{(1+x^2)^k}+\frac{2k-1}{2k}\int\frac{1}{(1+x^2)^k}\,dx$$

Lösung zu Aufgabe H3 Wir nutzen das Wurzelkriterium: Wegen

$$\sqrt[n]{|n(n+3)e^{nx}|} = \sqrt[n]{n(n+3)}\, e^x \xrightarrow{n\to\infty} e^x$$

gilt: Für $e^x < 1$ konvergiert die Reihe, für $e^x > 1$ divergiert sie. Das bedeutet: Für $x < 0$ liegt Konvergenz, für $x > 0$ Divergenz vor. Für $x = 0$ divergiert die Reihe offensichtlich. Insgesamt: Genau für $x < 0$ konvergiert die Reihe. Nun sei $x < 0$. Wir setzen $y := e^x$ und wollen

$$f(y) := \sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)y^{n-1}$$

berechnen. Offenbar besitzt $g(y) := f(y)/y$ die Stammfunktion

$$G(y) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+3)y^n = \frac{1}{y^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)y^{n+2}\,.$$

Nun hat wiederum $h(y) := y^2 G(y)$ die Stammfunktion

$$H(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n+3} = y^4 \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{y^4}{1-y}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$h(y) = H'(y) = \frac{4y^3(1-y)+y^4}{(1-y)^2} = \frac{4y^3-3y^4}{(1-y)^2}, \qquad G(y) = \frac{h(y)}{y^2} = \frac{4y-3y^2}{(1-y)^2}\,.$$

Also ist

$$g(y) = G'(y) = \frac{(4-6y)(1-y)^2 + (4y-3y^2)2(1-y)}{(1-y)^4} = \frac{4-2y}{(1-y)^3}\,.$$

Schließlich ergibt sich dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)e^{nx} = f(y) = yg(y) = \frac{4y-2y^2}{(1-y)^3} = \frac{4e^x - 2e^{2x}}{(1-e^x)^3}\,.$$

Lösung zu Aufgabe H4

(a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{t=\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}\,.$$

Für $R \to \infty$ strebt dies gegen $(\ln 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

(b) Dieses Integral ist divergent (am linken Rand), denn wegen

$$\sinh y - y = (y + \tfrac{1}{3!}y^3 + \cdots) - y = \tfrac{1}{3!}y^3 + o(y^3) = \tfrac{1}{3!}y^3(1+o(1)), \quad y \to 0,$$

gilt für hinreichend kleine $y > 0$ sicherlich $|\sinh y - y| \le y^3$. Wählt man zusätzlich y so klein, dass $|\ln y| \ge 1$ gilt, so ist

$$\left|\frac{y \ln y}{\sinh y - y}\right| \ge \frac{y|\ln y|}{y^3} = \frac{|\ln y|}{y^2} \ge \frac{1}{y^2}\,.$$

Mit dem Minorantenkriterium folgt die Divergenz, denn $\int_0^1 y^{-2}\,dy$ existiert nicht.

(c) Mit Produktintegration erhalten wir

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx\,.$$

Erneute Produktintegration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \frac{e^{sx}}{s^2}t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R\\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}\,.\end{aligned}$$

(Man beachte $s<0$.) Also ist das Integral konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2+t^2}\,.$$

(d) Mit Produktintegration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{\ln x}{(2x-1)^2}\,dx &= \int_1^R \frac{1}{(2x-1)^2}\cdot\ln x\,dx = -\frac{1}{2(2x-1)}\ln x\Big|_{x=1}^R + \int_1^R \frac{1}{2x(2x-1)}\,dx\\ &= -\frac{1}{2(2R-1)}\ln R + \int_1^R \frac{1}{2x(2x-1)}\,dx\end{aligned}$$

Für den Integranden des letzten Integrals bestimmen wir eine Partialbruchzerlegung: Aus

$$\frac{1}{x(2x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{2x-1}$$

folgt $a=-1$ (Multiplizieren mit x und $x=0$ einsetzen) und $b=2$ (Multiplizieren mit $2x-1$ und $x=\frac{1}{2}$ einsetzen). Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{1}{2x(2x-1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^R\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{2x-1}\right)dx = -\tfrac{1}{2}\ln x\Big|_{x=1}^R + \tfrac{1}{2}\ln(2x-1)\Big|_{x=1}^R\\ &= -\tfrac{1}{2}\ln R + \tfrac{1}{2}\ln(2R-1) = \tfrac{1}{2}\ln\frac{2R-1}{R} \xrightarrow{R\to\infty} \tfrac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Dies ist dann auch der Wert des zu untersuchenden uneigentlichen Integrals, denn $R^{-1}\ln R\to 0$ für $R\to\infty$.

Lösung zu Aufgabe F1 Die Substitution $x = \sinh y - 1$, $dx = \cosh y\, dy$ führt wegen der Identität $1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y$ auf

$$\int^t \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx = \int^t \frac{1}{x + \sqrt{1 + (x+1)^2}}\, dx = \int^{\operatorname{arsinh}(t+1)} \frac{\cosh y}{\sinh y - 1 + \cosh y}\, dy$$

Betrachten wir den Nenner:

$$\sinh y - 1 + \cosh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} - 1 + \frac{e^y + e^{-y}}{2} = e^y - 1$$

Also haben wir

$$\int^t \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx = \frac{1}{2} \int^{\operatorname{arsinh}(t+1)} \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - 1}\, dy\,;$$

wir substituieren $u = e^y$ ($y = \ln u$, $dy = u^{-1}\, du$):

$$= \frac{1}{2} \int^{\exp(\operatorname{arsinh}(t+1))} \frac{u + u^{-1}}{u - 1} \cdot \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2} \int^{\exp(\operatorname{arsinh}(t+1))} \frac{u^2 + 1}{u^2(u-1)}\, du$$

Für den Integranden gilt

$$\frac{u^2+1}{u^2(u-1)} = \frac{2u^2 + 1 - u^2}{u^2(u-1)} = \frac{2}{u-1} + \frac{(1-u)(1+u)}{u^2(u-1)} = \frac{2}{u-1} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\,.$$

Somit lautet das Endergebnis

$$\begin{aligned}\int^t \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx &= \ln|u - 1| + \frac{1}{2u} - \tfrac{1}{2} \ln|u| \,\Big|_{u=\exp(\operatorname{arsinh}(t+1))} \\ &= \ln|e^y - 1| + \tfrac{1}{2} e^{-y} - \tfrac{1}{2} y \,\Big|_{y=\operatorname{arsinh}(t+1)}\end{aligned}$$

Sämtliche Stammfunktionen erhält man, indem man hierzu noch beliebige Konstanten addiert.

Lösung zu Aufgabe F2

(a) Aus der Ungleichung $1 + x \le e^x$ folgt $\ln(1+t) \le t$ für alle $t \ge 0$. Also:

$$|e^{-t} \ln(1+t)| \le te^{-t}$$

Da das Integral $\int_0^\infty te^{-t}$ existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh x - 1 = \left(1 + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots\right) - 1 \ge \tfrac{1}{8!}x^8\,.$$

Also besteht die Abschätzung

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\cosh x - 1}} \le \frac{\sqrt[4]{8!}}{x^2}\,.$$

Aus dem Majorantenkriterium folgt: Der Teil $\int_1^\infty \ldots$ des Integrals existiert. Ebenso ist aber auch $\cosh x - 1 \geq \frac{1}{2!}x^2$. Hieraus folgt

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\cosh x - 1}} \leq \frac{\sqrt[4]{2}}{x^{1/2}}$$

und die Konvergenz von $\int_0^1 \ldots$ folgt ebenfalls mit dem Majorantenkriterium. Das Integral ist also konvergent.

(c) Bekanntlich gilt $x^\alpha \ln x \xrightarrow{x \to 0} 0$ für jedes $\alpha > 0$, insbesondere also $x^{1/2}(\ln x)^4 \xrightarrow{x \to 0} 0$. Für hinreichend kleine x besteht daher die Abschätzung

$$|x^{1/2}(\ln x)^4| \leq 1, \qquad \text{also} \qquad |(\ln x)^4| \leq x^{-1/2}$$

Die Konvergenz folgt nun aus dem Majorantenkriterium.

(d) Wegen $e^t - 1 \geq \frac{1}{n!}t^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{t^a}{e^t - 1} \leq n!\, t^{a-n}\,.$$

Unabhängig von a folgt die Konvergenz von $\int_1^\infty \ldots$. (Man kann ja n beliebig groß wählen.)

Wegen $e^t - 1 = t + o(t) = t(1 + o(1))$, $t \to 0$, gilt für alle hinreichend kleinen t sicherlich $t/2 \leq e^t - 1 \leq 2t$. Für diese t ergibt sich

$$\frac{t^{a-1}}{2} \leq \frac{t^a}{e^t - 1} \leq 2t^{a-1}\,.$$

Folglich existiert $\int_0^1 \ldots$ genau dann, wenn $a - 1 > -1$, also wenn $a > 0$. Genau dann existiert auch das gesamte Integral.

Lösung zu Aufgabe F3

(a) $b = 0$ klar, also jetzt $b \neq 0$. Zweimal partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{b}e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \in e^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b}e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x\right], \\
\Rightarrow \int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b \sin bx + a \cos bx) + C.
\end{aligned}$$

(b) $a = 1$ klar, also $a \neq 1$. Substitution $u = \ln x$ ergibt

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^a} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^a} = \frac{u^{1-a}}{1-a} + C = \frac{(\ln x)^{1-a}}{1-a} + C.$$

(c) Substitution $u = \sqrt{1+x}$ liefert

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2 \arctan u + C = 2 \arctan \sqrt{1+x} + C.$$

(d) Substitution $x = \sinh y - 1$, $dx = \cosh y\,dy$ führt wegen $1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y$ auf

$$\int^t \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}\,dx = \int^t \frac{1}{x + \sqrt{1 + (x+1)^2}}\,dx = \int^{\operatorname{arsinh}(t+1)} \frac{\cosh y}{\sinh y - 1 + \cosh y}\,dy$$

Nenner:

$$\sinh y - 1 + \cosh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} - 1 + \frac{e^y + e^{-y}}{2} = e^y - 1$$

Also

$$\int^t \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}\,dx = \frac{1}{2}\int^{\operatorname{arsinh}(t+1)} \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - 1}\,dy\,;$$

wir substituieren $u = e^y$ ($y = \ln u$, $dy = u^{-1}\,du$):

$$= \frac{1}{2}\int^{\exp(\operatorname{arsinh}(t+1))} \frac{u + u^{-1}}{u - 1}\cdot\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\int^{\exp(\operatorname{arsinh}(t+1))} \frac{u^2 + 1}{u^2(u-1)}\,du$$

Für den Integranden gilt

$$\frac{u^2+1}{u^2(u-1)} = \frac{2u^2 + 1 - u^2}{u^2(u-1)} = \frac{2}{u-1} + \frac{(1-u)(1+u)}{u^2(u-1)} = \frac{2}{u-1} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\,.$$

Also

$$\begin{aligned}\int^t \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}\,dx &= \ln|u-1| + \frac{1}{2u} - \tfrac{1}{2}\ln|u|\,\Big|_{u=\exp(\operatorname{arsinh}(t+1))} \\ &= \ln|e^y - 1| + \tfrac{1}{2}e^{-y} - \tfrac{1}{2}y\,\Big|_{y=\operatorname{arsinh}(t+1)}\end{aligned}$$

Sämtliche Stammfunktionen erhält man, indem man hierzu noch beliebige Konstanten addiert.

Lösung zu Aufgabe F4

a) Es ist ohne Beweis zu verwenden, dass $\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ gilt.

Wir haben $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \overset{t=u^2, dt=2u\,du}{=} 2\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$. Mit der Funktionalgleichung berechnen wir $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.
Für $-\frac{1}{2}$ ziehen wir die erweiterte Definition der Gammafunktion heran: $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$. Ebenso $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$ und $\Gamma(-\frac{5}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-\frac{5}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$.

b) Für $x > 0$ gilt bekanntlich die Funktionalgleichung. Sei deshalb $x < 0$ mit $-x \notin \mathbb{N}$. Ist $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $x + n > 0$ gilt, so haben wir definitionsgemäß

$$x\Gamma(x) = x\frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+1)\cdots(x+n-1)}\,,$$

sowie

$$\Gamma(x+1) = \frac{\Gamma(x+1+(n-1))}{(x+1)\cdots(x+1+(n-1)+1)} = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

Die Funktionalgleichung gilt also auch mit dem erweiterten Definitionsbereich der Gammafunktion.

c) Induktion über k.

$k=1$: $\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\Gamma(-\frac{1}{2}) = -\pi$. OK.

$k \Rightarrow k+1$: $\Gamma(\frac{2k+3}{2})\cdot\Gamma(-\frac{2k+1}{2}) = \frac{2k+1}{2}\Gamma(\frac{2k+1}{2})\cdot\frac{\Gamma(-\frac{2k-1}{2})}{-\frac{2k-1}{2}} = -\Gamma(\frac{2k+1}{2})\cdot\Gamma(-\frac{2k-1}{2}) = (-1)^{k+1}\pi$.

Somit gilt für alle $k\in\mathbb{N}$ die Beziehung

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(-\frac{2k-1}{2}\right) = (-1)^k\cdot\pi\,.$$